Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 24 Gennaio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome____________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_m = [(-1,0,-1,-m),(1,1,-m,-1)] \qquad K = [(1,0,-1,1),(-1,0,0,-1),(3,0,-1,3)]$$

(i) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $L(K)$.
(ii) Dire se esistono valori $m \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$.
(iii) Determinare la dimensione e una base di $(L(H_m) + L(K))^{\perp}$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.
(iv) Determinare l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ individuato dai vettori del sistema H_0.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-kz=k \\ x+ky-z+t=-1 \\ kx+y-z=k \\ x=0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $u = (0,-3,3)$ è l'immagine di un autovettore di autovalore $\lambda = 3$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x,y,z,t) \quad &= \quad (3x-5y+5z-5t, -2y, -2z, -2t) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento canonico $C = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.
(iii) Sulla base dei risultati precedenti è possibile dire che f è un epimorfismo?

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (2,1,-1) \qquad Q \equiv (3,2,-2) \qquad r : \begin{cases} x-y=-1 \\ y+z=1 \end{cases} \qquad \pi : x-y+z=2$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta s passante per P e Q.
(ii) Verificare che le rette r e s sono complanari. Determinare il piano α che le contiene e la distanza $d(r, s)$.
(iii) Determinare un'equazione cartesiana della retta n passante per l'origine, parallela a π e ortogonale a s.