

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 24 Gennaio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$  siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_m = [(-m, 0, 1, -1), (-1, 1, m, 1)] \quad K = [(1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1), (-1, 0, 1, 3)]$$

- Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di  $L(K)$ .
- Dire se esistono valori  $m \in \mathbb{R}$  per i quali  $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$ .
- Determinare la dimensione e una base di  $(L(H_m) + L(K))^\perp$  al variare di  $m \in \mathbb{R}$ .
- Determinare l'angolo  $\theta \in [0, \pi]$  individuato dai vettori del sistema  $H_0$ .

- 2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili  $x, y, z$  e  $t$ :

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ kx - y - z = -k \\ x - ky - z - t = 1 \\ x - y - kz = -k \\ z = 0 \end{cases}$$

- Determinare l'insieme delle soluzioni  $S_k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

- 3. Assegnato lo spazio vettoriale canonico  $\mathbb{R}^3$ , costruire un endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore  $u = (2, -2, 0)$  è l'immagine di un autovettore di autovalore  $\lambda = -2$  e  $\dim \text{Im } f = 2$ .

- 4. Assegnato il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$ :

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x, y, z, t) = (3x, 3y, -5x + 5y - 2z + 5t, 3t)$$

- Determinare la matrice  $A_f$  rispetto al riferimento canonico  $C = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ .
- Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo  $f$ , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_f$ .
- Sulla base dei risultati precedenti è possibile dire che  $f$  è un isomorfismo?

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 2, -1) \quad Q \equiv (1, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad \pi : x + y + z = 1$$

Risolvere i seguenti punti:

- Determinare una rappresentazione cartesiana della retta  $s$  passante per  $P$  e  $Q$ .
- Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono complanari. Determinare il piano  $\alpha$  che le contiene e la distanza  $d(r, s)$ .
- Determinare un'equazione cartesiana della retta  $n$  passante per l'origine, parallela a  $\pi$  e ortogonale a  $s$ .