Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 22 Febbraio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome____________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = [(0,1,0,0),(1,0,-1,-1),(-1,1,1,1)] \qquad K = \{(x,y,z,t) \mid x-y+z=0\} \qquad T_h = [(-h,h,-h,1-h)]$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap K$.
(ii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\dim(K + L(T_h)) = \dim\left(L(H) + K\right)$.
(iii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $L(T_h)^{\perp} = K$.
(iv) Dal sistema H estrarre una base di $L(H)$ e ortonormalizzarla.

(i) Per determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap K$ "studiamo" il sistema H. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango almeno 2 , questo perchè la sottomatrice $M_{1,2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ di ordine 2 estraibile da M ha determinante non nullo. Se si orla la sottomatrice precedente si ottiene sempre la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, il cui determinante è nullo. Possiamo concludere che il sistema H è linearmente dipendente e il sistema $S = [(0,1,0,0),(1,0,-1,-1)]$ è una base di $L(H)$, la relativa dimensione è 2. A questo punto scriviamo una rappresentazione cartesiana di $L(H) = \{a(0,1,0,0) + b(1,0,-1,-1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(b,a,-b,-b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z,t) \mid x+z=0, x+t=0\}$. In forma compatta possiamo scrivere:

$$L(H) = \{(x,y,z,t) \mid x+z=0, x+t=0\}.$$

Per determinare $L(H) \cap K$ non resta che risolvere il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} x+z=0 \\ x+t=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$.

Scriviamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si verifica facilmente che tale matrice ha rango 3 in quanto la sottomatrice $M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Per la teoria sui sistemi lineari omogenei possiamo concludere che tale sistema lineare ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Trattandosi di un sistema lineare omogeneo di n equazioni lineari in $n+1$ variabili (in questo caso $n=3$) il generatore del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ si trova nel seguente modo:

$$u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1,0,1,1).$$ Possiamo concludere che $L(H) \cap K = L[(1,0,-1,-1)]$ e la sua dimensione è 1 e una sua base è costituita dal sistema $T = [[(1,0,-1,-1)]$.

(ii) Osserviamo che K è un sottospazio di dimensione 3 (K è rappresentato da un'equazione lineare omogenea in 4 variabili). Una sua base si trova facilmente: $K = \{(x,y,z,t) \mid x-y+z = 0\} = \{(y-z,y,z,t) \mid y,z,t \in \mathbb{R}\} = L\left([(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1)]\right)$. Possiamo concludere che $S = [(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1)]$ è una base di K e la sua dimensione è 3.

A questo punto possiamo dire che $\dim\left(L(H)+K\right) = \dim(L(H)) + \dim(K) - \dim(L(H) \cap K) = 2+3-1 = 4$.

Affinchè $\dim(K + L(T_h)) = 4$ deve accadere che il vettore $v_h = (-h,h,-h,1-h)$ non deve appartenere a K, ovvero deve valere la relazione $-h-h-h = -3h \neq 0 \iff h \neq 0$ (Per non appartenere a K è sufficiente la condizione che le componenti di v_h non soddisfano l'equazione che definisce K). Un altro modo equivalente è imporre che la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h & h & -h & 1-h \end{pmatrix}$ abbia determinante diverso da zero.

(iii) Sappiamo che $K = \{(x,y,z,t) \mid x-y+z=0\} = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t)\cdot(1,-1,1,0)=0\}$, in forma compatta

$K = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t)\cdot(1,-1,1,0)=0\}$. In maniera esplicita possiamo affermare che il vettore $(1,-1,1,0)$ (le componenti sono i coefficienti delle variabili x,y,z,t nell'equazione che definisce K) è una base di $K^\perp$. Possiamo concludere che $K^\perp = L[(1,-1,1,0)]$ e questo implica $K = L[(1,-1,1,0)]^\perp$.

Ora se deve essere $K = L[(-h,h,-h,1-h)]^\perp \Longrightarrow L[(1,-1,1,0)]^\perp = L[(-h,h,-h,1-h)]^\perp \Longleftrightarrow L[(1,-1,1,0)] = L[(-h,h,-h,1-h)] \Longleftrightarrow$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -h & h & -h & 1-h \end{pmatrix}$ ha rango 1, questo accade se $h=1$. In definitiva possiamo dire che se $h=1 \Longrightarrow L(T_h)^\perp = K$ o se vogliamo $L(T_1)^\perp = K$.

Si può procedere anche nel seguente modo:

$$L(T_h)^\perp = K \Longleftrightarrow \begin{cases} (-h,h,-h,1-h)\cdot(1,1,0,0)=0 \\ (-h,h,-h,1-h)\cdot(-1,0,1,0)=0 \\ (-h,h,-h,1-h)\cdot(0,0,0,1)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0h=0 \\ 0h=0 \\ 1-h=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \{h=1\ .$$

(iv) Abbiamo nel punto (i) trovato una base di $L(H)$ e rappresentata dal sistema $S = [v_1 = (0,1,0,0), v_2 = (1,0,-1,-1)]$.

Come possiamo facilmente osservare una tale base è ortogonale, è sufficiente solo normalizzarla: $|v_1| = 1$ e $|v_2| = \sqrt{3}$.

Il seguente sistema: $N = \left[(0,1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$ è una base ortonormale di $L(H)$.

- **2**. Assegnate le seguenti matrici parametriche:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k & k & 0 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare i vettori $X = (x,y,z)$ tale che $A_k X^T = B_k$.

(i) Osserviamo che la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k & k & 0 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ ha rango al più 3. Se si considera la sottomatrice $M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k & k & 0 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}$, il suo determinante è $|M_k| = 2k$. Possiamo concludere che se $k \neq 0 \Longrightarrow r(A_k) = 3$. Non resta che discutere il caso $k=0$.

La matrice diventa $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,orlando la sottomatrice $M^{1,2}_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con la prima riga e terza colonna si ottiene la matrice $M^{1,2,3}_{1,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo; l'altro orlato $M^{1,2,3}_{2,3,4}$ avendo una riga nulla ha determinante nullo. Concludiamo che per $k=0$ il rango di A_0 è 2. Possiamo racchiudere i risultati ottenuti con il seguente schema: $\left[\begin{array}{c} k\neq 0 \Longrightarrow r(A_k)=3 \\ k=0 \Longrightarrow r(A_0)=2 \end{array}\right.$.

(ii) La condizione $A_k X^T = B_k$ posta equivale a risolvere il sistema lineare non omogeneo: $\left\{\begin{array}{c} x+y=0 \\ -kx+ky=0 \\ kx-y+z=1 \\ x+y+kz=k \end{array}\right.$, (osserviamo che è un sistema lineare di n equazioni lineari in $n-1$ incognite, la matrice completa è quadrata di ordine n). La matrice completa del sistema lineare non omogeneo è la seguente: $C_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 \\ k & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix}$, il suo determinante è nullo $\forall k \in \mathbb{R}$ in quanto le ultime due colonne sono uguali. Possiamo concludere che il rango della matrice completa C_k coincide con il rango della matrice incompleta A_k $\forall k \in \mathbb{R}$.

Per il teorema di Rouche-Capelli il sistema lineare sarà compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$.

I risultati ottenuti nel punto (i) sono interessanti per risolvere questo punto.

Se $k \neq 0$ il sistema lineare è il seguente: $\left\{\begin{array}{c} x+y=0 \\ -kx+ky=0 \\ kx-y+z=1 \end{array}\right.$.

Possiamo determinare le soluzioni con la regola di Cramer:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2k} = \frac{0}{2k} = 0;\ y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2k} = \frac{0}{2k} = 0;\ z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k & k & 0 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2k} = \frac{2k}{2k} = 1.$$

In conclusione se $k \neq 0 \Longrightarrow S_k = \{(0,0,1)\}$

Discutiamo il caso particolare $k=0$, $\left(\text{tenere conto della sottomatrice del punto precedente: } M_{3,4}^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

In tal caso il sistema lineare diventa $\left\{\begin{array}{c} -y=1-h \\ x+y=0 \end{array}\right.$ con $z=h$ variabile libera.

In tal caso si trova: $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-h & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1-h$; $y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1-h \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = h-1$. In conclusione $S_0 = \{(1-h, h-1, h) \mid h \in \mathbb{R}\}$.

Se vogliamo riassumere i risultati si ha: $\left[\begin{array}{c} k\neq 0 \Longrightarrow S_k = \{(0,0,1)\} \\ k=0 \Longrightarrow S_0 = \{(1-h,h-1,h) \mid h \in \mathbb{R}\} \end{array}\right.$.

3. La matrice di un endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $B = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,1))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare $f(1,1,0)$.
(ii) Determinare una base di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

Per rispondere alle domande poste potremmo determinare in primo luogo la legge $f(x,y,z)$ dell'endomorfismo. Un tale passaggio non è indispensabile e possiamo rispondere alle domande poste anche ragionando nel modo che segue, è sufficiente ricordare il ruolo delle colonne della matrice A_f e come essa si costruisce.

$f(0,0,1) = 1(0,0,1) + 0(1,0,0) + 1(0,1,1) = (0,1,2)$.
$f(1,0,0) = 0(0,0,1) + 0(1,0,0) + 0(0,1,1) = (0,0,0)$.

$f(0,1,1)=1(0,0,1)+0(1,0,0)+0(0,1,1)=(0,0,1)$.

In forma compatta: $\left[\begin{array}{l} f(0,0,1)=(0,1,2) \\ f(1,0,0)=(0,0,0) \\ f(0,1,1)=(0,0,1) \end{array}\right.$.

Osserviamo che esiste un unico endomorfismo che rispetta le precedenti tre condizioni.

(i) Il vettore $(1,1,0)=a(0,0,1)+b(1,0,0)+c(0,1,1)=(b,c,a+c)$ e quindi $\left\{\begin{array}{r} b=1 \\ c=1 \\ a+c=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{r} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{array}\right.$. In forma compatta possiamo scrivere: $(1,1,0)=-1(0,0,1)+1(1,0,0)+1(0,1,1)$.

Concludiamo che $f(1,1,0)=f(-1(0,0,1)+1(1,0,0)+1(0,1,1))=-1f(0,0,1)+1f(1,0,0)+1f(0,1,1)=-1(0,1,2)+1(0,0,0)+1(0,0,1)=(0,-1,-1)$.

La risposta al punto (i) è $f(1,1,0)=(0,-1,-1)$.

(ii) Le soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero $\left\{\begin{array}{r} x+z=0 \\ x=0 \end{array}\right.$ forniscono le componenti di $K\operatorname{erf}$ rispetto alla base B. Poichè una base dello spazio delle soluzioni è data dal sistema $S=[(0,1,0)]$, concludiamo che una base di $K\operatorname{erf}$ è data dal vettore $0(0,0,1)+1(1,0,0)+0(0,1,1)=(1,0,0)$.

In forma compatta $K\operatorname{erf}=L[(1,0,0)]$.

Allo stesso modo le colonne di A_f costituiscono le componenti di un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$ rispetto alla base B.

Il sistema $T=[(1,0,1),(1,0,0)]$ è linearmente indipendente (colonne della matrice A_f).
Possiamo concludere che i seguenti vettori:

$1(0,0,1)+0(1,0,0)+1(0,1,1)=(0,1,2)$
$1(0,0,1)+0(1,0,0)+0(0,1,1)=(0,0,1)$

costituiscono una base di $\operatorname{Im} f$. In forma compatta possiamo scrivere che $\operatorname{Im} f=L[(0,1,2),(0,0,1)]$.

Ai stessi risultati si arriva determinando la legge dell'endomorfismo f :

Sappiamo che $\left[\begin{array}{l} f(0,0,1)=(0,1,2) \\ f(1,0,0)=(0,0,0) \\ f(0,1,1)=(0,0,1) \end{array}\right.$ ..

Il vettore $(x,y,z)=a(0,0,1)+b(1,0,0)+c(0,1,1)=(b,c,a+c)$ e quindi $\left\{\begin{array}{r} b=x \\ c=y \\ a+c=z \end{array}\right. \Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{r} a=-y+z \\ b=x \\ c=y \end{array}\right.$. In forma compatta possiamo scrivere: $(x,y,z)=(-y+z)(0,0,1)+x(1,0,0)+y(0,1,1)$.

Concludiamo che $f(x,y,z)=f((-y+z)(0,0,1)+x(1,0,0)+y(0,1,1))=(-y+z)f(0,0,1)+xf(1,0,0)+yf(0,1,1)=$
$=(-y+z)(0,1,2)+x(0,0,0)+y(0,0,1)=(0,-y+z,-y+2z)$.

In forma compatta possiamo scrivere $f(x,y,z)=(0,-y+z,-y+2z)$. Avendo a disposizione la legge dell'endomorfismo è semplice rispondere ai quesiti. In questo caso $K\operatorname{erf}$: $\left\{\begin{array}{r} 0=0 \\ -y+z=0 \\ -y+2z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=h \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$, quindi $K\operatorname{erf}=L[(1,0,0)]$.

Il sistema $C = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3 \Longrightarrow [f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)]$ e un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^3)$, nel nostro caso sarà $[f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)] = [(0,0,0),(0,-1,-1),(0,1,2)]$ e dunque una base di $\operatorname{Im} f$ è data dal sistema $[(0,-1,-1),(0,1,2)]$. Possiamo scrivere $\operatorname{Im} f = L[(0,-1,-1),(0,1,2)]$, osservate che tale risultato coincide con quello trovato in precedenza, anche se prima abbiamo scritto $\operatorname{Im} f = L[(0,1,2),(0,0,1)]$, solo in apparenza sembra un risultato diverso.

$\operatorname{Im} f = L[(0,-1,-1),(0,1,2)] = L[(0,1,1),(0,1,2)] = L[(0,0,1),(0,1,2)]$, il vettore $(0,0,1) = (0,1,2)-(0,1,1)$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_h \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) \quad &= \quad ((1-h)y + (h-1)z, y, (h+1)y - hz) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

(i) La matrice che rappresenta f_h nella base canonica è la seguente: $A_{f_h} = \begin{pmatrix} 0 & 1-h & h-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h+1 & -h \end{pmatrix}$, sarà

$A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1-h & h-1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & h+1 & -h-\lambda \end{pmatrix}$ e

quindi $p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1-h & h-1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & h+1 & -h-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-h-\lambda)$.

Determiniamo gli autovalori: $-\lambda(1-\lambda)(-h-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -h$.

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $h = 0$ o $h = -1$.

Sia $h = 0$, la matrice $A_{f_0} - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autovalore $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ non è regolare e quindi l'endomorfismo f_0 non è diagonalizzabile.

Sia $h = -1$, in questo caso $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, si ha:

$A_{f_{-1}} - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_{-1}} - I) = 1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:

$\{\ x - 2y + 2z = 0 \ \Longrightarrow \{\ x = 2h - 2k$

$V_1 = \{(2h-2k, h, k) \text{ con } h,k \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (2,1,0)$ e $u_2 = (-2,0,1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ è $V_1 = [(2,1,0),(-2,0,1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} - 0I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = 0$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_{-1}} - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$V_0 = \{(x,0,0) \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,0,0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_1 = 0$ è $V_0 = [(1,0,0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_{-1}}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice P che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $h = -1$ è la seguente: $B = [(2,1,0), (-2,0,1), (1,0,0)]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0,1,-1) \qquad r : \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \pi : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = 1 + \alpha - \beta \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare un'equazione cartesiana del piano α passante per P parallelo a s e ortogonale a π.
(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t per P complanare a r e ortogonale a s.
(iii) Verificare che r e s sono sghembe e determinare la retta n normale e incidente r e s, calcolare $d(r,s)$.
(iv) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.

(i) Il piano cercato deve contenere le direzioni di s e la direzione ortogonale al piano. La direzione di s e la seguente $\overrightarrow{s} = (0,1,1)$, mentre la direzione normale al piano π è data dal vettore $\overrightarrow{\pi}_n = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1,1,0)$ [Osserviamo che la giacitura del piano π è data dal sottospazio generato dai vettori $(1,-1,1)$ e $(0,0,-1)$].

Il piano cercato è il seguente:

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \quad : \quad x - y + z = -2$$

(ii) La retta cercata è intersezione di due piani γ_1 e γ_2. Il piano γ_1 è il piano per P contenente la retta r e il piano γ_2 è il piano per P ortogonale alla retta s.

Determiniamo γ_1, scriviamo il fascio di piani $my + n(x+z) = 0$ e imponiamo il passaggio per P, si trova $m - n = 0$. Se poniamo $m = n = 1$ si trova $\gamma_1 : x + y + z = 0$.

Determiniamo γ_2, scriviamo la stella di piani $ax + b(y-1) + c(z+1) = 0$ e poniamo $(a,b,c) = (0,1,1)$, si trova: $\gamma_2 : y + z = 0$.

In conclusione scriviamo $t : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

(iii) I parametri direttori di r sono $\overrightarrow{r} = (1,0,-1)$ e i parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (0,1,1)$, dunque le rette non sono parallele. Si vede facilmente che le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili, possiamo concludere che le rette sono sghembe.

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$, quindi $\overrightarrow{n} = (1,-1,1)$.

Una rappresentazione cartesiana di r è la seguente: $r : \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

La retta ortogonale è incidente le due rette assegnate si può determinare come intersezione di due piani. Il primo α_1 che contiene la retta r e la direzione della normale $\overrightarrow{n}$ alle due rette, il secondo α_2 che contiene la retta s e la direzione della normale $\overrightarrow{n}$ alle due rette.

Fascio di piani per r e contenente la direzione $\overrightarrow{n}$: $my + n(x+z) = 0$, otteniamo:

$$nx + my + nz = 0$$

imponiamo la condizione che contenga la direzione $\overrightarrow{n}$ e quindi: $(n, m, n) \cdot (1, -1, 1) = 0 \Longrightarrow 2n - m = 0$, poniamo $n = 1$ e $m = 2$. Sostituendo tali valori nel fascio si ottiene il piano: $\alpha_1 : x + 2y + z = 0$.

Fascio di piani per s e contenente la direzione $\overrightarrow{n}$: $m(x+1) + n(y-z) = 0$, otteniamo:

$$mx + ny - nz + m = 0$$

imponiamo la condizione che contenga la direzione $\overrightarrow{n}$ e quindi: $(m, n, -n) \cdot (1, -1, 1) = 0 \Longrightarrow m - 2n = 0$, poniamo $n = 1$ e $m = 2$. Sostituendo tali valori nel fascio si ottiene il piano: $\alpha_2 : 2x + y - z = -2$.

La retta incidente e ortogonale sarà l'intersezione di questi ultimi due piani: $n : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$

Per calcolare la distanza tra le rette r e s, calcoliamo il piano δ per r parallelo a s. Sappiamo che tale piano deve contenere le direzioni di r e s e un punto a piacere scelto su r, come punto a piacere prenderemo proprio l'origine $O = (0,0,0)$. Il piano cercato è il seguente:

$$\begin{aligned} \delta \quad &: \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \delta \quad &: \quad x - y + z = 0 \end{aligned}$$

La distanza tra le due rette r e s coincide con la distanza di un punto H preso a piacere su s dal piano δ. $H = (-1, 1, 1)$, $d(r, s) = d(H, \delta) = \dfrac{|-1-1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. In forma compatta $d(r, s) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(iv) Il generico punto di r è il seguente: $P_t = (-t, 0, t)$, il vettore $\overrightarrow{PP_t}$ ha componenti: $\overrightarrow{PP_t} = (t, 1, -1-t)$, tale vettore è ortogonale alla retta r se e solo se $(t, 1, -1-t) \cdot (1, 0, -1) = 0 \Longleftrightarrow 2t + 1 = 0 \Longleftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Il punto cercato di r è il seguente: $P_{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$. La distanza di P da r coincide con la distanza di $P = (0, 1, -1)$ da $P_{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$. Possiamo scrivere che $d(P, r) = d(P, P_{-\frac{1}{2}})\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-1 + \dfrac{1}{2}\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1 + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Possiamo anche procedere in un altro modo, determinare il piano per P e ortogonale a r. Scriviamo la stella di piani $ax + b(y-1) + c(z+1) = 0$ e poniamo $(a, b, c) = (1, 0, -1)$, si trova: $x - z = 1$.

Ora intersechiamo tale piano con la retta r, si trova $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Come prima, indicato con $Q = \left(\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$ si trova lo stesso risultato con $d(P, r) = d(P, Q) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.