Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 22 Febbraio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = [(0,1,0,0),(1,0,-1,-1),(-1,1,1,1)] \qquad K = \{(x,y,z,t) \mid x-y+z=0\} \qquad T_h = [(-h,h,-h,1-h)]$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap K$.
(ii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\dim(K + L(T_h)) = \dim(L(H) + K)$.
(iii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $L(T_h)^{\perp} = K$.
(iv) Dal sistema H estrarre una base di $L(H)$ e ortonormalizzarla.

2. Assegnate le seguenti matrici parametriche:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k & k & 0 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare i vettori $X = (x,y,z)$ tale che $A_k X^T = B_k$.

3. La matrice di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $B = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,1))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare $f(1,1,0)$.
(ii) Determinare una base di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_h &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) &= ((1-h)y + (h-1)z, y, (h+1)y - hz) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0,1,-1) \qquad r : \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \pi : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = 1 + \alpha - \beta \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare un'equazione cartesiana del piano α passante per P parallelo a s e ortogonale a π.
(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t per P complanare a r e ortogonale a s.
(iii) Verificare che r e s sono sghembe e determinare la retta n normale e incidente r e s, calcolare $d(r,s)$.
(iv) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.