Esame di Geometria e Algebra

Matr.____________________

Prova scritta 21 Dicembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(-2-t, -1, 2+t), (1, 0, t+3)] \qquad T = \{(x, y, z) \mid \ x - y - z = 0,\ x = 0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione parametrica di $L(S_0)$.

(ii) Dire se esistono valori $t \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema S_t è una base di $T^\perp$.

(iii) Esibire una base K di $T^\perp$ ed estenderla ad una base W di $\mathbb{R}^3$.

(iv) Ortonormalizzare la base W e determinare le componenti del vettore $u = (-1, 1, 1)$ rispetto alla base ortonormalizzata N.

(i) Possiamo scrivere che $S_0 = [(-2, -1, 2), (1, 0, 3)]$, una rappresentazione cartesiana del sottospazio vettoriale è la seguente:

$L(S_0) = \{l(-2, -1, 2) + m(1, 0, 3) | \, l, m \in \mathbb{R}\} = \{(-2l + m, -l, 2l + 3m) | \, l, m \in \mathbb{R}\}$.

Intanto osserviamo che una base e la dimensione di T si determinano risolvendo il sistema: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, ponendo $y = l$ si trova $T = \{(0, l, -l) \mid \text{ con } l \in \mathbb{R}\}$. Una base di T è data dal seguente sistema: $W = [(0, 1, -1)]$.

Il sistema S_t è linearmente indipendente $\forall t \in \mathbb{R}$ in quanto la matrice $M_t = \begin{pmatrix} -2-t & -1 & 2+t \\ 1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ ha sempre rango 2, questo perchè la sottomatrice $M = \begin{pmatrix} -2-t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ di ordine 2 estraibile da M_t ha determinante non nullo. Possiamo concludere che $\dim L(S_t) = 2$. Resta da verificare se per qualche $t \in \mathbb{R}$ il sistema S_t è una base di $T^\perp$, abbiamo già visto che S_t è un sistema indipendente, verifichiamo se appartengono a $T^\perp$. Troviamo velocemente una rappresentazione cartesiana di $T^\perp$: $T^\perp = \{(x, y, z) | \ (x, y, z) \cdot (0, 1, -1) = 0\} = \{(x, y, z) | \ y - z = 0\}$, in forma compatta $T^\perp = \{(x, y, z) | \ y - z = 0\}$.

Affinchè i vettori del sistema S_t appartengono a $T^\perp$ devono soddisfare l'equazione: $\begin{array}{c} -1-2-t = 0 \\ 0-t-3 = 0 \end{array} \Leftrightarrow$ $t = -3$. Possiamo concludere che il sistema $S_{-3} = [(1, -1, -1), (1, 0, 0)]$ è una base di $T^\perp$. (**Metodo alternativo**: Verificare per quale $t \in \mathbb{R}$ i vettori di S_t sono ortogonali alla base di T].

(ii) La base K coincide con il sistema $S_2 = K = [(1, -1, -1), (1, 0, 0)]$, per estendere tale base a una base H di $\mathbb{R}^3$ è sufficiente includere nella base appena scritta il vettore della base di T, ricordiamo che $\mathbb{R}^3 = T^\perp \oplus T$ e sappiamo che facendo l'unione insiemistica di una base di $T^\perp$ con una base di T otteniamo una base di $\mathbb{R}^3$. In conclusione $W = [v_1 = (1, -1, -1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (0, 1, -1)]$.

(iii) Osserviamo che v_2, v_3 sono tra loro ortogonali. Per comodità scriviamo i seguenti vettori:

$w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, -1)$.

Consideriamo $v_1 = (1, -1, -1)$, tenendo conto che $v_1 \perp w_2$, con il procedimento di Gram-Schmidt si costruisce il seguente vettore:

$$\overline{w}_3 = v_1 - \frac{v_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_1 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = v_1 - \frac{v_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 =$$
$$= (1, -1, -1) - \frac{(1, -1, -1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} (1, 0, 0) = (1, -1, -1) - 1 \cdot (1, 0, 0) = (0, -1, -1).$$

Possiamo considerare il vettore $w_3 = (0, -1, -1)$ e il sistema $\Gamma = [(1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, -1, -1)]$ è una base ortogonale. Dividendo ciascun vettore per il proprio modulo si ottiene la base ortonormale:

$N = \left[(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$. Le componenti del vettore $u = (-1,1,1)$ rispetto alla base ortonormalizzata N sono i seguenti termini:

$\alpha = (1,0,0) \cdot (-1,1,1) = -1.$

$\beta = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1,1,1) = 0.$

$\gamma = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1,1,1) = -\sqrt{2}.$

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & -1 \\ 0 & k & k \\ -1 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la matrice $C_k = A_k \cdot B$, dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è invertibile e calcolare l'elemento di posto $(1,2)$ di C_1^{-1}.

(ii) Determinare il rango della matrice A_1^2.

(i) La matrice $C_k = A_k \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2k & -1 \\ 0 & k & k \\ -1 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2k & 0 \\ k & k & 0 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$,in forma compatta $C_k = \begin{pmatrix} -1 & 2k & 0 \\ k & k & 0 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$.

Se calcoliamo il determinante di C_k con la regola di Laplace utilizzando la prima riga, troviamo: $|C_k| = k + 2k^2$. La matrice C_k è invertibile $\Longleftrightarrow k + 2k^2 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 0 \vee k \neq -\frac{1}{2}$. Per calcolare l'elemento di posto $(2,1)$ della matrice C_1^{-1} non è necessario calcolare l'inversa di C_1. E' sufficiente riflettere su come si calcola l'inversa di una matrice, bisogna calcolare soltanto il cofattore $C_{1_{21}} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ e dividere tale quantità per il determinante della matrice C_1 che è uguale a 3 (ricordare che l'inversa si ottiene facendo la trasposta della matrice dei cofattori e dividendo ciascun termine per il determinante). In conclusione possiamo dire che l'elemento di posto $(1,2)$ della matrice C_1^{-1} è $\frac{2}{3}$.

(ii) La matrice A_k si ottiene dalla matrice C_k scambiando la prima con la terza colonna, dunque $|A_k| = -k - 2k^2$ e quindi $|A_1| = -3$ (proprietà sui determinanti quando si scambiano due linee il determinante cambia di segno). Sappiamo che $\det(A_1^2) = \det(A_1) \cdot \det(A_1) = (-3) \cdot (-3) = 9$, questo vuol dire che $\rho\left(A_1^2\right) = 3$ in quanto il suo determinante è non nullo.

- **3**. Si consideri il seguente omomorfismo:

$$\begin{aligned} f_h &\quad : \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z,t) &\quad = \quad (x + hz + ht, y + hz, x + 2z + 2t) \end{aligned}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $\ker f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta f_h un epimorfismo? Giustificare la risposta.

(iii) Determinare una base di $\operatorname{Im} f_0$.

(i) Per determinare una base di $\ker f_h$ bisogna discutere e risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} x + hz + ht = 0 \\ y + hz = 0 \\ x + 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice del sistema lineare omogeneo: $M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & h \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e studiamo il suo rango al variare di $h \in \mathbb{R}$. Utilizziamo il teorema degli orlati, osserviamo che la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e $2 \leq \rho(A) \leq 3$, orlando tale sottomatrice con la terza riga e terza colonna si ottiene la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, il suo determinante vale $2-h$. Possiamo concludere che se $2-h \neq 0 \Longleftrightarrow h \neq 2$ $\Longrightarrow \rho(M_h) = 3$.

In tal caso il sistema lineare ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Il generatore dello spazio delle soluzioni è il seguente (ricordiamo che trattasi di un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili e il rango della matrice è 3):

$$\ker f_h = L\left[\left(\begin{vmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & h & h \\ 0 & h & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right)\right] = L\left[\left(0, h^2-2h, 2-h, h-2\right)\right].$$

In sintesi $\ker f_h = L\left[\left(0, h^2-2h, 2-h, h-2\right)\right]$, questo se $h \neq 2$. Osserviamo che il calcolo dei determinanti scritti in precedenza sono immediati, basta utilizzare Laplace secondo linee che hanno due zeri.

<u>Studiamo il caso particolare: $h = 2$</u>. In tal caso la matrice diventa $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, si verifica facilmente che tale matrice ha rango 2 in quanto prima e terza riga sono uguali. In tal caso il sistema lineare ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. In questo caso il sistema lineare equivalente è il seguente:

$\begin{cases} x = -2z - 2t \\ y = -2z \end{cases} \Longleftrightarrow$ (ho considerato le righe dove è presente la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante non nullo). Possiamo scrivere che $\ker f_2 = \{(-2h-2k, -2h, h, k) \mid h, k \in \mathbb{R}\} = L\left[(-2,-2,1,0), (-2,0,0,1)\right]$.

(ii) Se $h \neq 2 \Longrightarrow$ sappiamo che $\dim K\operatorname{er} f_h = 1$, tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che $\dim \operatorname{Im} f_h = 3$ e quindi f_h è un epimorfismo. Se $h = 2$ sappiamo che $\dim K\operatorname{er} f_2 = 2$, tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che $\dim \operatorname{Im} f_2 = 2$ e quindi f_2 non è un epimorfismo. In conclusione la risposta al quesito è $h \neq 2$.

(iii) Come sappiamo le colonne della matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ costituiscono un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f_0$. In precedenza abbiamo visto che la sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 3 $\forall h \neq 2$, dunque per $h = 0$ si ottiene che il sistema $L = [(1,0,1), (0,1,0), (0,0,2)]$ risulta essere una base di $\operatorname{Im} f_0$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} -2 & h+1 & -2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h+1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_{f_h} rispetto al riferimento canonico.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

(iii) Sulla base di calcoli già effettuati, giustificando la risposta, dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_h non è un isomorfismo.

(i) Se A_f è la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica, la legge che definisce f si ottiene moltiplicando la matrice A_f con il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dunque $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & h+1 & -2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h+1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $(-2x+(h+1)y-2z, hy, (h+1)y-z)$, in forma più compatta $f(x,y,z) = (-2x+(h+1)y-2z, hy, (h+1)y-z)$.

(ii) La matrice che rappresenta f_h nel riferimento canonico è la seguente:
$A_{f_h} = \begin{pmatrix} -2 & h+1 & -2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h+1 & -1 \end{pmatrix}$, sarà $A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & h+1 & -2 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & h+1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ e

quindi $p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & h+1 & -2 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & h+1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(h-\lambda)(-1-\lambda)$. Il determinante si sviluppa in maniera immediata con Laplace alla prima colonna.

Determiniamo gli autovalori: $(-2-\lambda)(h-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -2, \lambda_2 = h, \lambda_3 = -1$.

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $h = -2$ o $h = -1$.

Sia $h = -2$, in questo caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ e la matrice $A_{f_{-2}} + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ non è regolare e quindi l'endomorfismo f_{-2} non è diagonalizzabile.

Sia $h = -1$, in questo caso $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, si ha:
$A_{f_{-1}} + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_{-1}} + I) = 1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:
$\left\{ -x - 2z = 0 \right. \Longrightarrow \left\{ x = -2z \right.$

$V_{-1} = \{(-2z, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (0,1,0)$ e $u_2 = (-2,0,1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ è $V_{-1} = [(0,1,0), (-2,0,1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = -2$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:
$A_{f_{-1}} + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$V_{-2} = \{(x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,0,0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2 = -2$ è $V_{-2} = [(1,0,0)]$. Una base di autovettori è la seguente: $B = [(0,1,0), (-2,0,1), (1,0,0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_{-1}}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice P che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi. E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_{f_{-1}} P = D$ dove D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}A_{f_1}P \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$QUESTA\ VERIFICA\ NON\ LA\ DOVETE\ ESEGUIRE$$

(iii) Gli autovalori calcolati sono $-1, -2, h$. Se $h = 0$ l'endomorfismo non è iniettivo perchè il suo nucleo è non banale. Insomma per $h = 0$ il sottospazio $\ker f_0$ è costituito dagli autovettori di autovalore $h = 0$. La risposta è $h = 0$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, 0) \qquad Q \equiv (1, 1, 0) \qquad R \equiv (-1, 0, -1) \qquad\qquad r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano α che li contiene.
(ii) Determinare il piano β che contiene r e passante per l'origine del riferimento.
(iii) Verificare che le rette r e s sono sghembe e calcolare $d(r, s)$.

(i) Determiniamo le componenti dei vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$: $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-2, 0, -1)$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 e quindi i tre punti non sono allineati. Il piano che li contiene deve soddisfare la seguente condizione (piano per uno qualsiasi dei tre punti, ad esempio P, e con giacitura data dai vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \quad : \quad x - 2z = 1$$

(ii) Un punto di r è $P_r = (-1, 0, -1)$ e il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha direzione $\overrightarrow{OP} = (-1, 0, -1)$ e i parametri direttori della retta r sono dati da $\overrightarrow{r} = (1, 1, 1)$. Il piano cercato è il seguente:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta \quad : \quad x - z = 0$$

(iii) I parametri direttori della retta r sono dati da $\overrightarrow{r} = (1, 1, 1)$ e i parametri direttori della retta s sono dati da $\overrightarrow{s} = (-1, 0, 1)$, dunque le due rette non sono parallele in quanto i parametri direttori non sono proporzionali. Un punto di r è $P_r = (-1, 0, -1)$ e un punto di s è $P_s = (1, 0, 0)$, la direzione $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, 0, 1)$. Si vede facilmente che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ha determinante non nullo e dunque le rette sono sghembe.

Per determinare la distanza tra le due rette utilizzeremo il piano π per r parallelo a s e distanza di un punto scelto a piacere di s dal piano π.

Piano per r parallelo a s (osserviamo che un punto di r è $P_r = (-1, 0, -1)$) : $\begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - 2y + z + 2 = 0$.

Un punto di s è $P_s = (1, 0, 0)$ e con la formula della distanza si trova: $d(P_s, \pi) = \dfrac{|1 + 2|}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.