

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 21 Dicembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(t-2, 1, 2-t), (1, 0, t-3)] \quad T = \{(x, y, z) \mid x+y-z=0, x=0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione parametrica di  $L(S_0)$ .(ii) Dire se esistono valori  $t \in \mathbb{R}$  per i quali il sistema  $S_t$  è una base di  $T^\perp$ .(iii) Esibire una base  $K$  di  $T^\perp$  ed estenderla ad una base  $W$  di  $\mathbb{R}^3$ .(iv) Ortonormalizzare la base  $W$  e determinare le componenti del vettore  $u = (-1, 1, 1)$  rispetto alla base ortonormalizzata  $N$ .(i) Possiamo scrivere che  $S_0 = [(-2, 1, 2), (1, 0, -3)]$ , una rappresentazione cartesiana del sottospazio vettoriale è la seguente:

$$L(S_0) = \{l(-2, 1, 2) + m(1, 0, -3) \mid l, m \in \mathbb{R}\} = \{(-2l+m, l, 2l-3m) \mid l, m \in \mathbb{R}\}.$$

Intanto osserviamo che una base e la dimensione di  $T$  si determinano risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y-z=0 \\ x=0 \end{cases}, \text{ ponendo } z=l \text{ si trova } T = \{(0, l, l) \mid l \in \mathbb{R}\}. \text{ Una base di } T \text{ è data dal seguente sistema: } W = [(0, 1, 1)].$$
Il sistema  $S_t$  è linearmente indipendente  $\forall t \in \mathbb{R}$  in quanto la matrice  $M_t = \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 2-t \\ 1 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$  hasempre rango 2, questo perchè la sottomatrice  $M = \begin{pmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  di ordine 2 estraibile da  $M_t$  ha determinante non nullo. Possiamo concludere che  $\dim L(S_t) = 2$ . Resta da verificare se per qualche  $t \in \mathbb{R}$  il sistema  $S_t$  è una base di  $T^\perp$ , abbiamo già visto che  $S_t$  è un sistema indipendente, verifichiamo se appartengono a  $T^\perp$ . Troviamo velocemente una rappresentazione cartesiana di  $T^\perp : T^\perp = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0\} = \{(x, y, z) \mid y+z=0\}$ , in forma compatta  $T^\perp = \{(x, y, z) \mid y+z=0\}$ .Affinchè i vettori del sistema  $S_t$  appartengono a  $T^\perp$  devono soddisfare l'equazione:  $\begin{matrix} 1+2-t=0 \\ 0+t-3=0 \end{matrix} \iff t=$ 3. Possiamo concludere che il sistema  $S_3 = [(1, 1, -1), (1, 0, 0)]$  è una base di  $T^\perp$ . (**Metodo alternativo:** Verificare per quale  $t \in \mathbb{R}$  i vettori di  $S_t$  sono ortogonali alla base di  $T$ ).(ii) La base  $K$  coincide con il sistema  $S_2 = K = [(1, 1, -1), (1, 0, 0)]$ , per estendere tale base a una base  $H$  di  $\mathbb{R}^3$  è sufficiente includere nella base appena scritta il vettore della base di  $T$ , ricordiamo che  $\mathbb{R}^3 = T^\perp \oplus T$  e sappiamo che facendo l'unione insiemistica di una base di  $T^\perp$  con una base di  $T$  otteniamo una base di  $\mathbb{R}^3$ . In conclusione  $W = [v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (0, 1, 1)]$ .(iii) Osserviamo che  $v_2, v_3$  sono tra loro ortogonali. Per comodità scriviamo i seguenti vettori:

$$w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 1).$$

Consideriamo  $v_1 = (1, 1, -1)$ , tenendo conto che  $v_1 \perp w_2$ , con il procedimento di Gram-Schmidt si costruisce il seguente vettore:

$$\begin{aligned} \bar{w}_3 &= v_1 - \frac{v_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_1 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = v_1 - \frac{v_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \\ &= (1, 1, -1) - \frac{(1, 1, -1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} (1, 0, 0) = (1, 1, -1) - 1 \cdot (1, 0, 0) = (0, 1, -1). \end{aligned}$$

Possiamo considerare il vettore  $w_3 = (0, 1, -1)$  e il sistema  $\Gamma = [(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)]$  è una base ortogonale. Dividendo ciascun vettore per il proprio modulo si ottiene la base ortonormale:

$$N = \left[ (1, 0, 0), \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]. \text{ Le componenti del vettore } u = (-1, 1, 1) \text{ rispetto alla base}$$

ortonormalizzata  $N$  sono i seguenti termini:

$$\alpha = (1, 0, 0) \cdot (-1, 1, 1) = -1.$$

$$\beta = \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (-1, 1, 1) = \sqrt{2}.$$

$$\gamma = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1, 1, 1) = 0.$$

- 2. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} -3k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la matrice  $C_k = A_k \cdot B$ , dire per quali valori  $k \in \mathbb{R}$  è invertibile e calcolare l'elemento di posto (3, 1) di  $C_1^{-1}$ .

(ii) Determinare il rango della matrice  $A_1^2$ .

(i) La matrice  $C_k = A_k \cdot B = \begin{pmatrix} -3k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3k \\ k & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , in forma

compatta  $C_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3k \\ k & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

.Se calcoliamo il determinante di  $C_k$  con la regola di Laplace utilizzando la terza riga, troviamo:

$|C_k| = 3k^2 + k$ . La matrice  $C_k$  è invertibile  $\Leftrightarrow 3k^2 + k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \vee k \neq \frac{1}{3}$ . Per calcolare l'elemento di posto (3, 1) della matrice  $C_1^{-1}$  non è necessario calcolare l'inversa di  $C_1$ . E' sufficiente riflettere su come si calcola l'inversa di una matrice, bisogna calcolare soltanto il cofattore  $C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$  e dividere tale quantità per il determinante della matrice  $C_1$  che è uguale a 4 (ricordare che l'inversa si ottiene facendo la trasposta della matrice dei cofattori e dividendo ciascun termine per il determinante). In conclusione possiamo dire che l'elemento di posto (3, 1) della matrice  $C_1^{-1}$  è  $-\frac{1}{4}$ .

(ii) La matrice  $A_k$  si ottiene dalla matrice  $C_k$  scambiando la prima con la terza colonna, dunque  $|A_k| = 3k^2 + k$  e quindi  $|A_1| = 4$  (proprietà sui determinanti quando si scambiano due linee il determinante cambia di segno). Sappiamo che  $\det(A_1^2) = \det(A_1) \cdot \det(A_1) = 4 \cdot 4 = 16$ , questo vuol dire che  $\rho(A_1^2) = 3$  in quanto il suo determinante è non nullo.

- 3. Si consideri il seguente omomorfismo:

$$f_h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f_h(x, y, z, t) = (x - hz - ht, -y + ht, x - z - t)$$

(i) Determinare una base e la dimensione di  $\ker f_h$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .

(ii) Per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  risulta  $f_h$  un epimorfismo? Giustificare la risposta.

(iii) Determinare una base di  $\text{Im } f_0$ .

(i) Per determinare una base di  $\ker f_h$  bisogna discutere e risolvere al variare di  $h \in \mathbb{R}$  il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} x - hz - ht = 0 \\ -y + ht = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice del sistema lineare omogeneo:  $M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h & -h \\ 0 & -1 & 0 & h \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  e studiamo il suo

rango al variare di  $h \in \mathbb{R}$ . Utilizziamo il teorema degli orlati, osserviamo che la sottomatrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ha determinante non nullo e  $2 \leq \rho(A) \leq 3$ , orlando tale sottomatrice con la terza riga e terza colonna si ottiene la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , il suo determinante vale  $1 - h$ . Possiamo concludere che se  $1 - h \neq 0 \iff h \neq 1 \implies \rho(M_h) = 3$ .

In tal caso il sistema lineare ammette  $\infty^{4-3} = \infty^1$  soluzioni. Il generatore dello spazio delle soluzioni è il seguente (ricordiamo che trattasi di un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili e il rango della matrice è 3):

$$\ker f_h = L \left[ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -h & -h & 1 & -h & -h \\ -1 & 0 & h & 0 & 0 & h \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right), - \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -h & 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & h & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \right] = L[(0, h^2 - h, 1 - h, h - 1)].$$

In sintesi  $\ker f_h = L[(0, h^2 - h, 1 - h, h - 1)]$ , questo se  $h \neq 1$ . Osserviamo che il calcolo dei determinanti scritti in precedenza sono immediati, basta utilizzare Laplace secondo linee che hanno due zeri.

Studiamo il caso particolare:  $h = 1$ . In tal caso la matrice diventa  $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ , si verifica facilmente che tale matrice ha rango 2 in quanto prima e terza riga sono uguali. In tal caso il sistema lineare ammette  $\infty^{4-2} = \infty^2$  soluzioni. In questo caso il sistema lineare equivalente è il seguente:

$$\begin{cases} x = z + t \\ -y = -t \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + t \\ y = t \end{cases} \quad (\text{ho considerato le righe dove è presente la sottomatrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ con determinante non nullo}).$$

Possiamo scrivere che  $\ker f_1 = \{(h + k, k, h, k) \mid h, k \in \mathbb{R}\} = L[(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1)]$ .

(ii) Se  $h \neq 1 \implies$  sappiamo che  $\dim \ker f_h = 1$ , tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che  $\dim \text{Im } f_h = 3$  e quindi  $f_h$  è un epimorfismo. Se  $h = 1$  sappiamo che  $\dim \ker f_1 = 2$ , tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che  $\dim \text{Im } f_1 = 2$  e quindi  $f_1$  non è un epimorfismo. In conclusione la risposta al quesito è  $h \neq 1$ .

(iii) Come sappiamo le colonne della matrice  $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  costituiscono un sistema di generatori di  $\text{Im } f_0$ . In precedenza abbiamo visto che la sottomatrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  ha rango 3  $\forall h \neq 1$ , dunque per  $h = 0$  si ottiene che il sistema  $L = [(1, 0, 1), (0, -1, 0), (0, 0, -1)]$  risulta essere una base di  $\text{Im } f_0$ .

- 4. Assegnata la seguente matrice di  $\mathbb{R}^3$ :

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} -2 & h-1 & -1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo  $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  che ammette la matrice  $A_{f_h}$  rispetto al riferimento canonico.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di  $f_h$  solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base  $B$  di autovettori e scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_{f_h}$ .

(iii) Sulla base di calcoli già effettuati, giustificando la risposta, dire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_h$  non è un isomorfismo.

(i) Se  $A_f$  è la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica, la legge che definisce  $f$  si ottiene

moltiplicando la matrice  $A_f$  con il vettore colonna  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , dunque  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & h-1 & -1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-2x + (h-1)y - z, hy, (h-1)y + z)$ , in forma più compatta  $f(x, y, z) = (-2x + (h-1)y - z, hy, (h-1)y + z)$ .

(ii) La matrice che rappresenta  $f_h$  nel riferimento canonico è la seguente:

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} -2 & h-1 & -1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h-1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ sarà } A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & h-1 & -1 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & h-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{ e quindi}$$

$$p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & h-1 & -1 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & h-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(h-\lambda)(1-\lambda). \text{ Il determinante si sviluppa in}$$

maniera immediata con Laplace alla prima colonna.

Determiniamo gli autovalori:  $(-2-\lambda)(h-\lambda)(1-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -2, \lambda_2 = h, \lambda_3 = 1$ .

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi  $h = -2$  o  $h = 1$ .

Sia  $h = -2$ , in questo caso  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$  e la matrice  $A_{f_{-2}} + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  ha rango 2, l'autovalore  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$  non è regolare e quindi l'endomorfismo  $f_{-2}$  non è diagonalizzabile.

Sia  $h = 1$ , in questo caso  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_1} - \lambda I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , si ha:

$$A_{f_1} - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \rho(A_{f_1} - I) = 1 \implies \text{l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:}$$

$$\begin{cases} -3x - z = 0 \\ \end{cases} \implies \begin{cases} z = -3x \end{cases}$$

$V_1 = \{(x, y, -3x) \text{ con } x, y \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dai due vettori:  $u_1 = (1, 0, -3)$  e  $u_2 = (0, 1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  è  $V_1 = [(1, 0, -3), (0, 1, 0)]$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_1} - \lambda I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $\lambda_2 = -2$  (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$$A_{f_1} + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -z = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$V_{-2} = \{(x, 0, 0) \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dal vettore:  $u_3 = (1, 0, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $\lambda_2 = -2$  è  $V_{-2} = [(1, 0, 0)]$ . Una base di autovettori è la seguente:  $B = [(1, 0, -3), (0, 1, 0), (1, 0, 0)]$ .

La matrice diagonalizzante la  $A_{f_1}$  è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice  $P$  che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi. E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$$P^{-1}A_{f_1}P = D \text{ dove } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ infatti si ha:}$$

$$P^{-1}A_{f_1}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*QUESTA VERIFICA NON LA DOVETE ESEGUIRE*

(iii) Gli autovalori calcolati sono  $1, -2, h$ . Se  $h = 0$  l'endomorfismo non è iniettivo perchè il suo nucleo è non banale. Insomma per  $h = 0$  il sottospazio  $\ker f_0$  è costituito dagli autovettori di autovalore  $h = 0$ . La risposta è  $h = 0$ .

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, 0) \quad Q \equiv (1, 1, 0) \quad R \equiv (-1, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano  $\alpha$  che li contiene.

(ii) Determinare il piano  $\beta$  che contiene  $r$  e passante per l'origine del riferimento.

(iii) Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe e calcolare  $d(r, s)$ .

(i) Determiniamo le componenti dei vettori  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PR}$ :  $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{PR} = (-2, 0, 1)$ , la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 2 e quindi i tre punti non sono allineati. Il piano che li contiene deve soddisfare la seguente condizione (piano per uno qualsiasi dei tre punti, ad esempio  $P$ , e con giacitura data dai vettori  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PR}$ ):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha : x + 2z = 1$$

(ii) Un punto di  $r$  è  $P_r = (2, 1, 0)$  e il vettore  $\overrightarrow{OP}$  ha direzione  $\overrightarrow{OP} = (2, 1, 0)$  e i parametri direttori della retta  $r$  sono dati da  $\vec{r} = (1, 1, -1)$ . Il piano cercato è il seguente:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta : x - 2y - z = 0$$

(iii) I parametri direttori della retta  $r$  sono dati da  $\vec{r} = (1, 1, -1)$  e i parametri direttori della retta  $s$  sono dati da  $\vec{s} = (0, 1, 1)$ , dunque le due rette non sono parallele in quanto i parametri direttori non sono proporzionali. Un punto di  $r$  è  $P_r = (2, 1, 0)$  e un punto di  $s$  è  $P_s = (0, 2, 0)$ , la direzione  $\overrightarrow{P_r P_s} = (-2, 1, 0)$ . Si vede facilmente che la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ha determinante non nullo e dunque le rette sono sghembe.

Per determinare la distanza tra le due rette utilizzeremo il piano  $\pi$  per  $r$  parallelo a  $s$  e distanza di un punto scelto a piacere di  $s$  dal piano  $\pi$ .

$$\text{Piano per } r \text{ parallelo a } s \text{ (osserviamo che un punto di } r \text{ è } P_r = (2, 1, 0)) : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$2x - y + z - 3 = 0.$$

Un punto di  $s$  è  $P_s = (0, 2, 0)$  e con la formula della distanza si trova:  $d(P_s, \pi) = \frac{|-2-3|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ .