Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 21 Dicembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(t-1, 1, 3-t), (1, 0, t-2)] \qquad T = \{(x, y, z) \mid \ x + y + z = 0,\ x = 0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione parametrica di $L(S_0)$.

(ii) Dire se esistono valori $t \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema S_t è una base di $T^\perp$.

(iii) Esibire una base K di $T^\perp$ ed estenderla ad una base W di $\mathbb{R}^3$.

(iv) Ortonormalizzare la base W e determinare le componenti del vettore $u = (-1, 1, 1)$ rispetto alla base ortonormalizzata N.

(i) Possiamo scrivere che $S_0 = [(-1, 1, 3), (1, 0, -2)]$, una rappresentazione cartesiana del sottospazio vettoriale è la seguente:

$L(S_0) = \{l(-1, 1, 3) + m(1, 0, -2) |\, l, m \in \mathbb{R}\} = \{(-l + m, l, 3l - 2m) |\, l, m \in \mathbb{R}\}$.

Intanto osserviamo che una base e la dimensione di T si determinano risolvendo il sistema: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$, ponendo $z = l$ si trova $T = \{(0, -l, l) \mid \ \text{con } l \in \mathbb{R}\}$. Una base di T è data dal seguente sistema: $W = [(0, 1, -1)]$.

Il sistema S_t è linearmente indipendente $\forall t \in \mathbb{R}$ in quanto la matrice $M_t = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 3-t \\ 1 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$ ha sempre rango 2, questo perchè la sottomatrice $M = \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ di ordine 2 estraibile da M_t ha determinante non nullo. Possiamo concludere che $\dim L(S_t) = 2$. Resta da verificare se per qualche $t \in \mathbb{R}$ il sistema S_t è una base di $T^\perp$, abbiamo già visto che S_t è un sistema indipendente, verifichiamo se appartengono a $T^\perp$. Troviamo velocemente una rappresentazione cartesiana di $T^\perp$: $T^\perp = \{(x, y, z) |\ (x, y, z) \cdot (0, 1, -1) = 0\} = \{(x, y, z) |\ y - z = 0\}$, in forma compatta $T^\perp = \{(x, y, z) |\ y - z = 0\}$.

Affinchè i vettori del sistema S_t appartengono a $T^\perp$ devono soddisfare l'equazione: $\begin{matrix} 1-3+t=0 \\ 0-t+2=0 \end{matrix} \Leftrightarrow t = 2$. Possiamo concludere che il sistema $S_2 = [(1, 1, 1), (1, 0, 0)]$ è una base di $T^\perp$. (**Metodo alternativo**: Verificare per quale $t \in \mathbb{R}$ i vettori di S_t sono ortogonali alla base di T].

(ii) La base K coincide con il sistema $S_2 = K = [(1, 1, 1), (1, 0, 0)]$, per estendere tale base a una base H di $\mathbb{R}^3$ è sufficiente includere nella base appena scritta il vettore della base di T, ricordiamo che $\mathbb{R}^3 = T^\perp \oplus T$ e sappiamo che facendo l'unione insiemistica di una base di $T^\perp$ con una base di T otteniamo una base di $\mathbb{R}^3$. In conclusione $W = [v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (0, 1, -1)]$.

(iii) Osserviamo che v_2, v_3 sono tra loro ortogonali. Per comodità scriviamo i seguenti vettori:

$w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (0, 1, -1)$.

Consideriamo $v_1 = (1, 1, 1)$, tenendo conto che $v_1 \perp w_2$, con il procedimento di Gram-Schmidt si costruisce il seguente vettore:

$$\overline{w}_3 = v_1 - \frac{v_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_1 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = v_1 - \frac{v_1 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 =$$
$$= (1, 1, 1) - \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} (1, 0, 0) = (1, 1, 1) - 1 \cdot (1, 0, 0) = (0, 1, 1).$$

Possiamo considerare il vettore $w_3 = (0, 1, 1)$ e il sistema $\Gamma = [(1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1)]$ è una base ortogonale. Dividendo ciascun vettore per il proprio modulo si ottiene la base ortonormale: $N = \left[(1, 0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$. Le componenti del vettore $u = (-1, 1, 1)$ rispetto alla base ortonormalizzata N sono i seguenti termini:

$\alpha = (1,0,0) \cdot (-1,1,1) = -1.$
$\beta = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1,1,1) = 0.$
$\gamma = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1,1,1) = \sqrt{2}.$

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la matrice $C_k = A_k \cdot B$, dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è invertibile e calcolare l'elemento di posto $(1,3)$ di C_1^{-1}.
(ii) Determinare il rango della matrice A_1^2.
(i) La matrice $C_k = A_k \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k & 1 & 3k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$,in forma compatta $C_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k & 1 & 3k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se calcoliamo il determinante di C_k con la regola di Laplace utilizzando la prima riga, troviamo: $|C_k| = k - 3k^2$. La matrice C_k è invertibile $\iff k - 3k^2 \neq 0 \iff k \neq 0 \vee k \neq \frac{1}{3}$. Per calcolare l'elemento di posto $(1,3)$ della matrice C_1^{-1} non è necessario calcolare l'inversa di C_1. E' sufficiente riflettere su come si calcola l'inversa di una matrice, bisogna calcolare soltanto il cofattore $C_{1_{31}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$ e dividere tale quantità per il determinante della matrice C_1 che è uguale a -2 (ricordare che l'inversa si ottiene facendo la trasposta della matrice dei cofattori e dividendo ciascun termine per il determinante). In conclusione possiamo dire che l'elemento di posto $(1,3)$ della matrice C_1^{-1} è $\frac{3}{2}$.

(ii) La matrice A_k si ottiene dalla matrice C_k scambiando la prima con la terza colonna, dunque $|A_k| = 3k^2 - k$ e quindi $|A_1| = 2$ (proprietà sui determinanti quando si scambiano due linee il determinante cambia di segno). Sappiamo che $\det(A_1^2) = \det(A_1) \cdot \det(A_1) = 2 \cdot 2 = 4$, questo vuol dire che $\rho\left(A_1^2\right) = 3$ in quanto il suo determinante è non nullo.

- **3**. Si consideri il seguente omomorfismo:

$$\begin{aligned} f_h \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z,t) \quad &= \quad (x + hz + ht, -y + hz, x - z - t) \end{aligned}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $\ker f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta f_h un epimorfismo? Giustificare la risposta.
(iii) Determinare una base di $\mathrm{Im}\, f_0$.

(i) Per determinare una base di $\ker f_h$ bisogna discutere e risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} x + hz + ht = 0 \\ -y + hz = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice del sistema lineare omogeneo: $M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & h \\ 0 & -1 & h & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e studiamo il suo rango al variare di $h \in \mathbb{R}$. Utilizziamo il teorema degli orlati, osserviamo che la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e $2 \leq \rho(A) \leq 3$, orlando tale sottomatrice con la terza riga e terza colonna si ottiene la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & -1 & h \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, il suo determinante vale $h+1$. Possiamo concludere che se $h+1 \neq 0 \Longleftrightarrow h \neq -1 \Longrightarrow \rho(M_h) = 3$.

In tal caso il sistema lineare ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Il generatore dello spazio delle soluzioni è il seguente (ricordiamo che trattasi di un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili e il rango della matrice è 3):

$$\ker f_h = L\left[\left(\begin{vmatrix} 0 & h & h \\ -1 & h & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & h & h \\ 0 & h & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & -1 & h \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right)\right] =$$
$$L\left[\left(0, h^2+h, h+1, -h-1\right)\right].$$

In sintesi $\ker f_h = L\left[\left(0, h^2+h, h+1, -h-1\right)\right]$, questo se $h \neq -1$. Osserviamo che il calcolo dei determinanti scritti in precedenza sono immediati, basta utilizzare Laplace secondo linee che hanno due zeri.

Studiamo il caso particolare: $h = -1$. In tal caso la matrice diventa $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, si verifica facilmente che tale matrice ha rango 2 in quanto prima e terza riga sono uguali. In tal caso il sistema lineare ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. In questo caso il sistema lineare equivalente è il seguente:

$\begin{cases} x = z + t \\ -y = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z + t \\ y = -z \end{cases}$ (ho considerato le righe dove è presente la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante non nullo). Possiamo scrivere che $\ker f_{-1} = \{(h+k, -h, h, k) \mid h, k \in \mathbb{R}\} = L\left[(1,-1,1,0), (1,0,0,1)\right]$.

(ii) Se $h \neq -1 \Longrightarrow$ sappiamo che $\dim K\mathrm{erf}_h = 1$, tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che $\dim \mathrm{Im}\, f_h = 3$ e quindi f_h è un epimorfismo. Se $h = -1$ sappiamo che $\dim K\mathrm{erf}_{-1} = 2$, tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che $\dim \mathrm{Im}\, f_{-1} = 2$ e quindi f_{-1} non è un epimorfismo. In conclusione la risposta al quesito è $h \neq -1$.

(iii) Come sappiamo le colonne della matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ costituiscono un sistema di generatori di $\mathrm{Im}\, f_0$. In precedenza abbiamo visto che la sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & -1 & h \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 $\forall h \neq -1$, dunque per $h = 0$ si ottiene che il sistema $L = [(1,0,1), (0,-1,0), (0,0,-1)]$ risulta essere una base di $\mathrm{Im}\, f_0$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} 2 & h-1 & -2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_{f_h} rispetto al riferimento canonico.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

(iii) Sulla base di calcoli già effettuati, giustificando la risposta, dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_h non è un isomorfismo.

(i) Se A_f è la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica, la legge che definisce f si ottiene moltiplicando la matrice A_f con il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dunque $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & h-1 & -2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $(2x+(h-1)y-2z, hy, (h-1)y+z)$, in forma più compatta $f(x,y,z) = (2x+(h-1)y-2z, hy, (h-1)y+z)$.

(ii) La matrice che rappresenta f_h nel riferimento canonico è la seguente: $A_{f_h} = \begin{pmatrix} 2 & h-1 & -2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h-1 & 1 \end{pmatrix}$, sarà $A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & h-1 & -2 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & h-1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ e

quindi $p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & h-1 & -2 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & h-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(h-\lambda)(1-\lambda)$. Il determinante si sviluppa in maniera immediata con Laplace alla prima colonna.

Determiniamo gli autovalori: $(2-\lambda)(h-\lambda)(1-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 2, \lambda_2 = h, \lambda_3 = 1$.

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $h = 2$ o $h = 1$.

Sia $h = 2$, in questo caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ e la matrice $A_{f_2} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ non è regolare e quindi l'endomorfismo f_2 non è diagonalizzabile.

Sia $h = 1$, in questo caso $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_1} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, si ha:

$A_{f_1} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_1} - I) = 1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:

$\left\{ x - 2z = 0 \right. \Longrightarrow \left\{ x = 2z \right.$

$V_1 = \{(2z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (0,1,0)$ e $u_2 = (2,0,1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ è $V_1 = [(0,1,0),(2,0,1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_1} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = 2$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_1} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$V_2 = \{(x,0,0) \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,0,0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2 = 2$ è $V_2 = [(1,0,0)]$. Una base di autovettori è la seguente: $B = [(0,1,0),(2,0,1),(1,0,0)]$.

La matrice diagonalizzante la A_{f_1} è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice P che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi. E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_{f_1} P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$
P^{-1}A_{f_1}P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
QUESTA\ VERIFICA\ NON\ LA\ DOVETE\ ESEGUIRE
$$

(iii) Gli autovalori calcolati sono $1, 2, h$. Se $h = 0$ l'endomorfismo non è iniettivo perchè il suo nucleo è non banale. Insomma per $h = 0$ il sottospazio $\ker f_0$ è costituito dagli autovettori di autovalore $h = 0$. La risposta è $h = 0$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$
P \equiv (0,0,1) \qquad Q \equiv (0,1,1) \qquad R \equiv (1,0,-1) \qquad r : \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 0 \end{cases}
$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano α che li contiene.
(ii) Determinare il piano β che contiene r e passante per l'origine del riferimento.
(iii) Verificare che le rette r e s sono sghembe e calcolare $d(r, s)$.

(i) Determiniamo le componenti dei vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$: $\overrightarrow{PQ} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{PR} = (1,0,-2)$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 e quindi i tre punti non sono allineati. Il piano che li contiene deve soddisfare la seguente condizione (piano per uno qualsiasi dei tre punti, ad esempio P, e con giacitura data dai vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$):

$$
\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\alpha \quad : \quad 2x + z = 1
$$

(ii) Un punto di r è $P_r = (1,0,1)$ e il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha direzione $\overrightarrow{OP} = (1,0,1)$ e i parametri direttori della retta r sono dati da $\overrightarrow{r} = (-1,1,1)$. Il piano cercato è il seguente:

$$
\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\beta \quad : \quad x + 2y - z = 0
$$

(iii) I parametri direttori della retta r sono dati da $\overrightarrow{r} = (-1,1,1)$ e i parametri direttori della retta s sono dati da $\overrightarrow{s} = (1,1,0)$, dunque le due rette non sono parallele in quanto i parametri direttori non sono proporzionali. Un punto di r è $P_r = (1,0,1)$ e un punto di s è $P_s = (2,0,0)$, la direzione $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,0,-1)$. Si vede facilmente che la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ha determinante non nullo e dunque le rette sono sghembe.

Per determinare la distanza tra le due rette utilizzeremo il piano π per r parallelo a s e distanza di un punto scelto a piacere di s dal piano π.

Piano per r parallelo a s (osserviamo che un punto di r è $P_r = (1,0,1)$) : $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$ $x - y + 2z - 3 = 0$.

Un punto di s è $P_s = (2,0,0)$ e con la formula della distanza si trova: $d(P_s, \pi) = \dfrac{|2-3|}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.