

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 21 Dicembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^3, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(-2 - t, -1, t + 2), (1, 0, t + 3)] \quad T = \{(x, y, z) \mid x - y - z = 0, x = 0\}$$

- (i) Determinare una rappresentazione parametrica di $L(S_0)$.
- (ii) Dire se esistono valori $t \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema S_t è una base di T^\perp .
- (iii) Esibire una base K di T^\perp ed estenderla ad una base W di \mathbb{R}^3 .
- (iv) Ortonormalizzare la base W e determinare le componenti del vettore $u = (-1, 1, 1)$ rispetto alla base ortonormalizzata N .

- 2. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & -1 \\ 0 & k & k \\ -1 & k & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare la matrice $C_k = A_k \cdot B$, dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è invertibile e calcolare l'elemento di posto $(1, 2)$ di C_1^{-1} .
- (ii) Determinare il rango della matrice A_1^2 .

- 3. Si consideri il seguente omomorfismo:

$$f_h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x, y, z, t) = (x + hz + ht, y + hz, x + 2z + 2t)$$

- (i) Determinare una base e la dimensione di $\ker f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
- (ii) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta f_h un epimorfismo? Giustificare la risposta.
- (iii) Determinare una base di $\text{Im } f_0$.

- 4. Assegnata la seguente matrice di \mathbb{R}^3 :

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} -2 & h + 1 & -2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h + 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare l'endomorfismo $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_{f_h} rispetto al riferimento canonico.
- (ii) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h} .
- (iii) Sulla base di calcoli già effettuati, giustificando la risposta, dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_h non è un isomorfismo.

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, 0) \quad Q \equiv (1, 1, 0) \quad R \equiv (-1, 0, -1) \quad r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

- (i) Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano α che li contiene.
- (ii) Determinare il piano β che contiene r e passante per l'origine del riferimento.
- (iii) Verificare che le rette r e s sono sghembe e calcolare $d(r, s)$.