

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 21 Dicembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(-1-t, -1, t+3), (1, 0, t+2)] \quad T = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0, x = 0\}$$

- Determinare una rappresentazione parametrica di  $L(S_0)$ .
- Dire se esistono valori  $t \in \mathbb{R}$  per i quali il sistema  $S_t$  è una base di  $T^\perp$ .
- Esibire una base  $K$  di  $T^\perp$  ed estenderla ad una base  $W$  di  $\mathbb{R}^3$ .
- Ortonormalizzare la base  $W$  e determinare le componenti del vettore  $u = (-1, 1, 1)$  rispetto alla base ortonormalizzata  $N$ .

- 2. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2k & k & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare la matrice  $C_k = A_k \cdot B$ , dire per quali valori  $k \in \mathbb{R}$  è invertibile e calcolare l'elemento di posto  $(2, 1)$  di  $C_1^{-1}$ .
- Determinare il rango della matrice  $A_1^2$ .

- 3. Si consideri il seguente omomorfismo:

$$f_h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x, y, z, t) = (x + hz + ht, y - hz, x - 2z - 2t)$$

- Determinare una base e la dimensione di  $\ker f_h$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .
- Per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  risulta  $f_h$  un epimorfismo? Giustificare la risposta.
- Determinare una base di  $\text{Im } f_0$ .

- 4. Assegnata la seguente matrice di  $\mathbb{R}^3$ :

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} 2 & h+1 & -1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h+1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinare l'endomorfismo  $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  che ammette la matrice  $A_{f_h}$  rispetto al riferimento canonico.
- Studiare la diagonalizzabilità di  $f_h$  solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base  $B$  di autovettori e scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_{f_h}$ .
- Sulla base di calcoli già effettuati, giustificando la risposta, dire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_h$  non è un isomorfismo.

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0, 0, -1) \quad Q \equiv (0, 1, -1) \quad R \equiv (1, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + z = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

- Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano  $\alpha$  che li contiene.
- Determinare il piano  $\beta$  che contiene  $r$  e passante per l'origine del riferimento.
- Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe e calcolare  $d(r, s)$ .