Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 21 Dicembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome______________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(t-2, 1, 2-t), (1, 0, t-3)] \qquad T = \{(x, y, z) \mid \ x + y - z = 0,\ x = 0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione parametrica di $L(S_0)$.
(ii) Dire se esistono valori $t \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema S_t è una base di $T^{\perp}$.
(iii) Esibire una base K di $T^{\perp}$ ed estenderla ad una base W di $\mathbb{R}^3$.
(iv) Ortonormalizzare la base W e determinare le componenti del vettore $u = (-1, 1, 1)$ rispetto alla base ortonormalizzata N.

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} -3k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la matrice $C_k = A_k \cdot B$, dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è invertibile e calcolare l'elemento di posto $(3, 1)$ di C_1^{-1}.
(ii) Determinare il rango della matrice A_1^2.

- **3**. Si consideri il seguente omomorfismo:

$$\begin{aligned} f_h \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x, y, z, t) \quad &= \quad (x - hz - ht, -y + ht, x - z - t) \end{aligned}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $\ker f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta f_h un epimorfismo? Giustificare la risposta.
(iii) Determinare una base di $\mathrm{Im}\, f_0$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} -2 & h-1 & -1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_{f_h} rispetto al riferimento canonico.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.
(iii) Sulla base di calcoli già effettuati, giustificando la risposta, dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_h non è un isomorfismo.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, 0) \qquad Q \equiv (1, 1, 0) \qquad R \equiv (-1, 0, 1) \qquad r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano α che li contiene.
(ii) Determinare il piano β che contiene r e passante per l'origine del riferimento.
(iii) Verificare che le rette r e s sono sghembe e calcolare $d(r, s)$.