Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 17 Febbraio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

Istruzioni: *Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo, gli stessi sistemi lineari devono essere risolti utilizzando i metodi studiati che coinvolgono l'utilizzo delle matrici.*

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ il sottospazio vettoriale ortogonale ad U è il seguente:

$$U^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid y + t = 0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione parametrica di $U^{\perp}$, una sua base Γ_1 e la relativa dimensione.

(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di U e una sua base Γ_2.

(iii) Scrivere in forma parametrica due sottospazi vettoriali $H_1 \neq H_2$, distinti anche da U, supplementari in $\mathbb{R}^4$ di $U^{\perp}$.

(iv) Determinare l'angolo tra il vettore $v = (1, 1, 0, 0)$ e un vettore $w \neq 0$ di U.

(i) Sappiamo che $U^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, l'equazione $y + t = 0 \Longrightarrow y = -t$ e quindi se poniamo $x = \alpha$, $t = \beta$ e $z = \gamma$ si ha: $U^{\perp} = \{(\alpha, -\beta, \gamma, \beta) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ che risulta essere una rappresentazione parametrica. Osserviamo che $U^{\perp} = \{(\alpha, -\beta, \gamma, \beta) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} =$

$\{\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, -1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = L\left[(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\right]$, quindi $U^{\perp} = L\left[(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\right]$, il sistema $\Gamma_1 = \left[(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\right]$ è una base di $U^{\perp}$ e $\dim U^{\perp} = 3$.

(ii) Dobbiamo osservare che $U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ e quindi

$U = \{(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t) \cdot (1, 0, 0, 0) = 0, (x, y, z, t) \cdot (0, -1, 0, 1) = 0, (x, y, z, t) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0\} =$
$= \{(x, y, z, t) \mid x = 0,\ -y + t = 0,\ z = 0\}$; in sintesi $U = \{(x, y, z, t) \mid x = 0,\ -y + t = 0,\ z = 0\}$ è una rappresentazione cartesiana. Come in precedenza per avere una rappresentazione parametrica poniamo $x = 0$, $z = 0$ e $t = \alpha$, si ha: $U = \{(0, \alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e ancora $U = \{\alpha(0, 1, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\left[(0, 1, 0, 1)\right]$ e quindi $\Gamma_2 = \left[(0, 1, 0, 1)\right]$ è una base di U e $\dim U = 1$.

(iii) Per scrivere un sottospazio vettoriale supplementare di $U^{\perp}$ in via preliminare determiniamo un vettore u_1 di $\mathbb{R}^4$ da aggiungere al sistema Γ_1 e ottenere una base di $\mathbb{R}^4$. Per costruire un tale vettore è sufficiente costruire la matrice 3×4 con i vettori della base di $U^{\perp}$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, in questa matrice individuiamo senza eccessivi sforzi una sottomatrice di ordine 3 con determinante non nullo, ad esempio $M^{1,2,3}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se nella matrice M si aggiunge come quarta riga il vettore $u_1 = (0, 0, 0, 1)$ si ottiene $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si inseriscono degli 0 in corrispondenza della sottomatrice di ordine 3 con determinante non nullo e 1 altrove. Evidente che $H_1 = L\left(\left[(0, 0, 0, 1)\right]\right) = \{(0, 0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che soddisfa le condizioni poste in quanto la matrice M_1 ha determinante non nullo. Allo stesso modo, sempre in riferimento alla matrice M, considerando la sottomatrice $M^{1,3,4}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e si aggiunge nella matrice M come quarta riga il vettore $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ si ottiene $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,si inseriscono degli 0 in corrispondenza della sottomatrice di ordine 3 con determinante non nullo e 1 altrove. Evidente che $H_2 = L\left(\left[(0, 1, 0, 0)\right]\right) = \{(0, \alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che soddisfa le condizioni poste. Osserviamo che $H_1 = \{(0, 0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \neq H_2 = \{(0, \alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \neq U = \{(0, \alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(iv) Consideriamo il vettore $w = (0,1,0,1)$ di U, si ha: $\cos\theta = \dfrac{(1,1,0,0)\cdot(0,1,0,1)}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k+2 \\ 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare la matrice $C_k = B_k \cdot A_k$, dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è invertibile e calcolare l'inversa.
(iii) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ le colonne di $D_k = C_k C_k^T$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.

(i) Applichiamo il teorema degli orlati, osserviamo che la matrice ha rango almeno 1 in quanto la sottomatrice di ordine 1 $M_2^1 = (1)$ ha determinante diverso da zero. Orliamo tale sottomatrice con la terza riga e seconda colonna e otteniamo $M_{2,3}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ che ha determinante nullo, ancora un orlato con la prima riga e seconda colonna e otteniamo $M_{2,1}^{1,2} = \begin{pmatrix} -k & -k+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ovvio che $\left|M_{2,1}^{1,2}\right| = k-2$ e quindi $k-2=0 \Longleftrightarrow k=2$, possiamo concludere per il teorema degli orlati che $\rho(A_k) = 1 \Longleftrightarrow k=2$, ovvio che $\rho(A_k) = 2 \Longleftrightarrow k \neq 2$.

(ii) La matrice $C_k = B_k \cdot A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -k+2 \\ 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix}$, poichè $\begin{vmatrix} k & k-2 \\ 0 & 2-k \end{vmatrix} = -k(k-2)$ possiamo affermare che C_k è invertibile $\Longleftrightarrow -k(k-2) \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq 2$. Per calcolare l'inversa procediamo attraverso i seguenti passi: $\widehat{C_k} = \begin{pmatrix} -k+2 & 0 \\ -k+2 & k \end{pmatrix}$, $\widehat{C_k}^T = \begin{pmatrix} -k+2 & -k+2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e finalmente dividendo ciascun termine dell'ultima matrice per il determinante e facendo le dovute semplificazioni otteniamo l'inversa di C_k : $C_k^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & -\frac{1}{k-2} \end{pmatrix}$.

(iii) Evidente che la matrice D_k è una matrice quadrata e le sue colonne sono una base di $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow$ il determinante di D_k è diverso da zero. Dobbiamo limitarci a calcolare soltanto il determinante della matrice $D_k = C_k C_k^T$, applicando le proprietà dei determinanti otteniamo: $|D_k| = \left|C_k C_k^T\right| = |C_k|\left|C_k^T\right| = |C_k||C_k| = |C_k|^2 = [-k(k-2)]^2 = k^2(k-2)^2$; possiamo concludere che le colonne di D_k sono una base di $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow k \neq 0 \wedge$ $k \neq 2$.

- **3**. Assegnato il seguente sistema lineare omogeneo parametrico, con $k \in \mathbb{R}$ e nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $K\,\mathrm{erf} = S_0$.
(iii) Può esistere un omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}\, g = S_1$ che sia un monomorfismo? Giustificare la risposta.

(i) Scriviamo la matrice del sistema: $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e troviamo che $|A| = -3k$. Ovvio che se $k \neq 0$ per il teorema di Cramer il sistema ammette solo la soluzione banale e quindi $S_k = \{(0,0,0)\}\ \forall k \neq 0$. Se invece $k = 0$ allora la matrice A ha rango 2 ci si rende conto facilmente che la matrice del sistema lineare omogeneo diventa $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, le soluzioni sono $\infty^{3-2} = \infty^1$ e come al solito il generatore ha come componenti il determinante della matrice di ordine 2 che si ottengono da M cancellando di seguito la 1^a colonna, la 2^a colonna e la terza 3^a colonna, ricordiamo di considerare tali determinati a segno alterno.

$S_0 = L\left[\left(\left|\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right|, -\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right|\right)\right] = L\left[(-2,2,2)\right] = L\left[(1,-1,-1)\right]$ (ricordiamo che nel risolvere tale sistema abbiamo applicato un criterio generale sui sistemi lineari omogenei con $n-1$ equazioni in n variabili con il rango della matrice dei coefficienti n). Possiamo concludere $S_0 = L\left[(1,-1,-1)\right]$.

(ii) Osserviamo che di applicazioni che soddisfano le condizioni assegnate ne esistono infinite, ogni omomorfismo è univocamente determinato quando si assegnano le immagini sui vettori di una base. Dobbiamo costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $K\,\mathrm{erf} = S_0 = L[(1,-1,-1)]$. Per fare questo dobbiamo estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$ il sistema $S = [(1,-1,-1)]$, noi prenderemo la base $T = [(1,-1,-1),(0,1,0),(0,0,1)]$, visto che $\dim K\,\mathrm{erf} = 1$ faremo in modo che l'immagine di questo omomorfismo f da costruire abbia dimensione 2 per rispettare la relazione $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim K\,\mathrm{erf} + \dim \mathrm{Im}\, f$.

Fissiamo a piacere, tenendo però conto dell'equazione dimensionale [se $\dim K\,\mathrm{erf} = 1 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = 2$], le immagini di f sui vettori di una base e poi la estendiamo per linearità:

$f(1,-1,-1) = (0,0,0)$
$f(0,1,0) = (0,1,0)$
$f(0,0,1) = (0,0,1)$

Sappiamo che $(x,y,z) = \alpha(1,-1,-1) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (\alpha, -\alpha+\beta, -\alpha+\gamma) \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{c} \alpha = x \\ -\alpha+\beta = y \\ -\alpha+\gamma = z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = x \\ \beta = x+y \\ \gamma = x+z \end{array}\right.$ e quindi $f(x,y,z) = \alpha f(1,-1,-1) + \beta f(0,1,0) + \gamma f(0,0,1) = x(0,0,0) + (x+y)(0,1,0) + (x+z)(0,0,1) = (0, x+y, x+z)$

In sintesi l'omomorfismo costruito è il seguente: $f(x,y,z) = (0, x+y, x+z)$.

(iii) Un omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}\, g = S_1$ avendo $\dim \mathrm{Im}\, g = 0$ deve avere $\dim Kerg = 2$ e quindi non è un monomorfismo; l'omomorfismo che soddisfa le condizioni poste non può esistere.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} f_h & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) & = & (-x+3y+2z, 2y+2z, hz) \end{array}$$

(i) Determinare la matrice A_{f_h} rispetto al riferimento $B = ((1,0,0),(0,0,1),(0,1,0))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

(i)

Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:

$f_h(1,0,0) = (-1,0,0)$;
$f_h(0,0,1) = (2,2,h)$;
$f_h(0,1,0) = (3,2,0)$;

Ci chiediamo quali sono le componenti di queste immagini nella base $B = ((1,0,0),(0,0,1),(0,1,0))$:

$a(1,0,0) + b(0,0,1) + c(0,1,0) = (a,c,b) \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{c} a=-1 \\ c=0 \\ b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=-1 \\ b=0 \\ c=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} a=2 \\ c=2 \\ b=h \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=2 \\ b=h \\ c=2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} a=3 \\ c=2 \\ b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=3 \\ b=0 \\ c=2 \end{array}\right.$

Risulta evidente che la base assegnata è stata ottenuta dalla base canonica attraverso una permutazione della stessa, anche le componenti hanno subito una permutazione e seguono il ciclo: $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$.

La matrice A_{f_h} si costruisce mettendo come colonne le componenti dei vettori immagine:

$A_{f_h} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e il punto (i) è risolto.

(ii) La matrice che rappresenta f_h nella base del punto (i) è la seguente: $A_{f_h} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, sarà $A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ e

quindi $p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (h-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$.

Determiniamo gli autovalori: $(h-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = h, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $h = -1$ o $h = 2$.

Sia $h = 2$, la matrice $A_{f_2} - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autovalore $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ non è regolare e quindi l'endomorfismo f_2 non è diagonalizzabile.

Sia $h = -1$, in questo caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_2} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, si ha:

$A_{f_{-1}} + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_{-1}} + I) = 1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:

$\left\{ \; 2y + 3z = 0 \right. \Longrightarrow \left\{ \; y = -\frac{3}{2}z \right.$

$V_{-1} = \left\{ (x, -\frac{3}{2}z, z) \text{ con } x, z \in \mathbb{R} \right\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (1, 0, 0)$ e $u_2 = (0, -3, 2)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ è $V_{-1} = [(1, 0, 0), (0, -3, 2)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 2$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_{-1}} - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

$V_2 = \{(z, 0, z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 0, 1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_3 = 2$ è $V_2 = [(1, 0, 1)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_{-1}}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice P che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_{f_{-1}} P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1} A_{f_{-1}} P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Per essere più espliciti consideriamo l'autospazio V_{-1}, una sua base è costituita dai vettori $u_1 = (1, 0, 0)$ e $u_2 = (0, -3, 2)$, di questi solo il primo è un autovettore in quanto la base pur non essendo quella canonica il primo vettore della base scelta coincide con quello della base canonica, infatti si ha:

$$\begin{aligned} f_{-1}(1,0,0) &= (-1,0,0) = -1(1,0,0) \\ &\text{mentre} \\ f_{-1}(0,-3,2) &= (-7,-1,-2) \neq -1(0,-3,2) \end{aligned}$$

Osserviamo che i vettori:

$$\begin{aligned} \underline{(1,0,0)} &= 1(1,0,0) + 0(0,0,1) + 0(0,1,0) \\ \underline{(0,2,-3)} &= 0(1,0,0) - 3(0,0,1) + 2(0,1,0) \\ \underline{(1,1,0)} &= 1(1,0,0) + 0(0,0,1) + 1(0,1,0) \end{aligned}$$

sono tali che i primi due sono autovettori di autovalore 1 e l'ultimo è un autovettore di autovalore -2. Una base di autovettori è la seguente: $B = [(1,0,0), (0,2,-3), (1,1,0)]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,-1,1) \qquad r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \pi: x + 2y + z = 1$$

(i) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la distanza e la retta ortogonale e incidente r e s.
(ii) Determinare la l retta per P ortogonale e incidente s.
(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana del piano α contenente la retta s e passante per P.
(iv) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t passante per P e perpendicolare ad π.
(v) Determinare il punto Q, intersezione tra la retta r e il piano π.
(vi) Determinare una rappresentazione cartesiana e una parametrica del piano γ per P parallelo a r e s.

(i) Intanto determiniamo la direzione di s calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, quindi $\overrightarrow{s} = (1,0,1)$. Vista la rappresentazione parametrica di r i suoi parametri direttori sono $\overrightarrow{r} = (1,1,0)$. Ci sono tanti modi per verificare che le rette sono sghembe (metodi di carattere generale sono esposti nelle note all'interno del sito web). In primo luogo osserviamo dai parametri direttori che le rette non hanno la stessa direzione, inoltre si può facilmente controllare che le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili tra loro. Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2 a segno alterno della seguente matrice:

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = -1$, quindi $\overrightarrow{n} = (1,-1,-1)$. Il generico punto di r è descritto da $P_t = (2+t, t, -1)$, con non molte difficoltà si scrive una rappresentazione parametrica di s : $\begin{cases} x = t' \\ y = 1 \\ z = t' \end{cases}$ e quindi il generico punto di s è descritto da $Q_{t'} = (t', 1, t')$. Ora consideriamo le componenti del vettore $\overrightarrow{P_tQ_{t'}} = (t' - t - 2, 1 - t, t' + 1)$ e imponiamo la condizione che le componenti di tale vettore siano proporzionali alla direzione normale $\overrightarrow{n} = (1,-1,-1)$; una tale condizione è soddisfatta se la matrice $N = \begin{pmatrix} t' - t - 2 & 1 - t & t' + 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 1. La condizione è verificata (teorema degli orlati) se

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} t'-t-2 & 1-t \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} t'-t-2 & t'+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t-t'=-1 \\ t-2t'=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ t'=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Il punto cercato della retta r ha coordinate $P=\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},-1\right)$. Il punto cercato della retta s ha coordinate $Q=\left(\frac{1}{3},1,\frac{1}{3}\right)$.

Questo ci premette di calcolare la distanza tra le due rette: $d(r,s)=d(P,Q)=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Un'equazione parametrica della retta n è la seguente: $\begin{cases} x=\frac{5}{3}+t \\ y=-\frac{1}{3}-t \\ z=-1-t \end{cases}$. Sempre all'interno del sito è esposto un metodo alternativo a questo.

(ii) E' sufficiente intersecare il piano β_1 contenente la retta s e passante per $P\equiv(1,-1,1)$ con il piano β_2 passante per P e ortogonale alla retta s.

Per β_1 fascio di piani per $s:\lambda(x-z)+\mu(x+y-z-1)=0$, se imponiamo il passaggio per $P\equiv(1,-1,1)$ otteniamo $-2\mu=0$, si ottiene $\beta_1: x-z=0$. Per β_2 tenendo conto della direzione di s scriviamo $x+z=d$, imponiamo il passaggio per P e otteniamo $d=2$, quindi $\beta_2: x+z=2$. In conclusione una equazione della retta per P ortogonale e incidente s è la seguente: $l:\begin{cases} x-z=0 \\ x+z=2 \end{cases}$. In relazione a questo punto proponiamo un altro metodo, si considera il generico punto di s che indichiamo con $Q_{t'}=(t',1,t')$ e calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ_{t'}}=(t'-1,2,t'-1)$ e imponiamo che la terna di componenti di tale vettore sia ortogonale alla direzione di s:

$(t'-1,2,t'-1)\cdot(1,0,1)=0 \iff t'=1$. Concludiamo che la direzione della retta da determinare è $\overrightarrow{PQ_1}$ $=(0,2,0)\backsim(0,1,0)$. La retta l ha equazione parametrica: $l:\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=1 \end{cases}$

(iii) Il piano α da determinare coincide con il piano $\beta_1: x-z=0$.

(iv) La direzione normale al piano π è data dal vettore $(1,2,1)$, una equazione parametrica della retta t è la seguente: $t:\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=1+t \end{cases}$, una rappresentazione cartesiana è la seguente: $t:\begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$.

(v) Il punto Q si ottiene facilmente sostituendo nell'equazione del piano il generico punto della retta r ottenendo la relazione $(2+t)+2t-1=1 \iff t=0$ e quindi il punto $Q\equiv(2,0,-1)$.

(vi) Il piano γ che dobbiamo determinare deve contenere la direzione delle rette r e s e contenere il punto $P\equiv(1,-1,1)$.

$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$, quindi $\gamma: x-y-z=1$. Se vogliamo scrivere una rappresentazione parametrica di tale piano si ha: $\gamma:\begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=-1+\lambda \\ z=1+\mu \end{cases}$.