Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 17 Febbraio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

Istruzioni: *Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo, gli stessi sistemi lineari devono essere risolti secondo i metodi studiati che coinvolgono l'utilizzo delle matrici.*

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ il sottospazio vettoriale ortogonale ad U è il seguente:

$$U^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid y - t = 0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione parametrica di $U^{\perp}$, una sua base Γ_1 e la relativa dimensione.

(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di U e una sua base Γ_2.

(iii) Scrivere in forma parametrica due sottospazi vettoriali $H_1 \neq H_2$, distinti anche da U, supplementari in $\mathbb{R}^4$ di $U^{\perp}$.

(iv) Determinare l'angolo tra il vettore $v = (0, -1, 1, 0)$ e un vettore $w \neq 0$ di U.

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k-1 \\ 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare la matrice $C_k = B_k \cdot A_k$, dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è invertibile e calcolare l'inversa.

(iii) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ le righe di $D_k = C_k C_k^T$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.

- **3**. Assegnato il seguente sistema lineare omogeneo parametrico, con $k \in \mathbb{R}$ e nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $K\,\mathrm{erf} = S_0$.

(iii) Può esistere un omomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}\, g = S_0$ che non sia un monomorfismo? Giustificare la risposta.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} f_h & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x, y, z) & = & (-2x + y - 2z, -y - 2z, hz) \end{array}$$

(i) Determinare la matrice A_{f_h} rispetto al riferimento $B = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 1, -1) \qquad r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = -2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \pi : x - 2y - z = 1$$

(i) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la distanza e la retta ortogonale e incidente r e s.

(ii) Determinare la retta l per P ortogonale e incidente s.

(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana del piano α contenente la retta s e passante per P.

(iv) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t passante per P e perpendicolare ad π.

(v) Determinare il punto Q, intersezione tra la retta r e il piano π.

(vi) Determinare una rappresentazione cartesiana e una parametrica del piano γ per P parallelo a r e s.