# Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 17 Febbraio 2012

**Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)** Cognome e Nome________________________________

**Istruzioni**: *Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo, gli stessi sistemi lineari devono essere risolti secondo i metodi studiati che coinvolgono l'utilizzo delle matrici.*

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ il sottospazio vettoriale ortogonale ad $U$ è il seguente:

$$U^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid y + t = 0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione parametrica di $U^{\perp}$, una sua base $\Gamma_1$ e la relativa dimensione.

(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di $U$ e una sua base $\Gamma_2$.

(iii) Scrivere in forma parametrica due sottospazi vettoriali $H_1 \neq H_2$, distinti anche da $U$, supplementari in $\mathbb{R}^4$ di $U^{\perp}$.

(iv) Determinare l'angolo tra il vettore $v = (1, 1, 0, 0)$ e un vettore $w \neq 0$ di $U$.

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k+2 \\ 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di $A_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare la matrice $C_k = B_k \cdot A_k$, dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ è invertibile e calcolare l'inversa.

(iii) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ le colonne di $D_k = C_k C_k^T$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.

- **3**. Assegnato il seguente sistema lineare omogeneo parametrico, con $k \in \mathbb{R}$ e nelle variabili $x, y, z$:

$$\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni $S_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $K\,\mathrm{erf} = S_0$.

(iii) Può esistere un omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\operatorname{Im} g = S_1$ che sia un monomorfismo? Giustificare la risposta.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_h \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x, y, z) \quad &= \quad (-x + 3y + 2z, 2y + 2z, hz) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice $A_{f_h}$ rispetto al riferimento $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di $f_h$ solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base $B$ di autovettori e scrivere la matrice $P$ che diagonalizza $A_{f_h}$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -1, 1) \qquad r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \pi : x + 2y + z = 1$$

(i) Verificare che le rette $r$ e $s$ sono sghembe, determinare la distanza e la retta ortogonale e incidente $r$ e $s$.

(ii) Determinare la retta $l$ per $P$ ortogonale e incidente $s$.

(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana del piano $\alpha$ contenente la retta $s$ e passante per $P$.

(iv) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta $t$ passante per $P$ e perpendicolare ad $\pi$.

(v) Determinare il punto $Q$, intersezione tra la retta $r$ e il piano $\pi$.

(vi) Determinare una rappresentazione cartesiana e una parametrica del piano $\gamma$ per $P$ parallelo a $r$ e $s$.