

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 17 Febbraio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)      Cognome e Nome \_\_\_\_\_

**Istruzioni:** Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo, gli stessi sistemi lineari devono essere risolti secondo i metodi studiati che coinvolgono l'utilizzo delle matrici.

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$  il sottospazio vettoriale ortogonale ad  $U$  è il seguente:

$$U^\perp = \{(x, y, z, t) \mid y + z = 0\}$$

- (i) Determinare una rappresentazione parametrica di  $U^\perp$ , una sua base  $\Gamma_1$  e la relativa dimensione.
- (ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di  $U$  e una sua base  $\Gamma_2$ .
- (iii) Scrivere in forma parametrica due sottospazi vettoriali  $H_1 \neq H_2$ , distinti anche da  $U$ , supplementari in  $\mathbb{R}^4$  di  $U^\perp$ .
- (iv) Determinare l'angolo tra il vettore  $v = (-1, 1, 1, 1)$  e un vettore  $w \neq 0$  di  $U$ .

- 2. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & k-1 \\ 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare il rango di  $A_k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
  - (ii) Determinare la matrice  $C_k = B_k \cdot A_k$ , dire per quali valori  $k \in \mathbb{R}$  è invertibile e calcolare l'inversa.
  - (iii) Determinare per quali  $k \in \mathbb{R}$  le colonne di  $D_k = C_k C_k^T$  sono una base di  $\mathbb{R}^2$ .
- 3. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico, con  $k \in \mathbb{R}$  e nelle variabili  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} kx - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

- (i) Determinare l'insieme delle soluzioni  $S_k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Determinare un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\text{Ker} f = S_0$ .
- (iii) Può esistere un omomorfismo  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\text{Ker} g = S_0$  che non sia un epimorfismo? Giustificare la risposta.

- 4. Assegnato il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x, y, z) = (x - z, -x + 2y - z, hz)$$

- (i) Determinare la matrice  $A_{f_h}$  rispetto al riferimento  $B = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ .
- (ii) Studiare la diagonalizzabilità di  $f_h$  solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base  $B$  di autovettori e scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_{f_h}$ .

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 1, 1) \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \pi : x - 2y + z = 1$$

- (i) Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe, determinare la distanza e la retta ortogonale e incidente  $r$  e  $s$ .
- (ii) Determinare la retta  $l$  per  $P$  ortogonale e incidente  $s$ .
- (iii) Determinare una rappresentazione cartesiana del piano  $\alpha$  contenente la retta  $s$  e passante per  $P$ .
- (iv) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta  $t$  passante per  $P$  e perpendicolare ad  $\pi$ .
- (v) Determinare il punto  $Q$ , intersezione tra la retta  $r$  e il piano  $\pi$ .
- (vi) Determinare una rappresentazione cartesiana e una parametrica del piano  $\gamma$  per  $P$  parallelo a  $r$  e  $s$ .