Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 13 Settembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

Istruzioni: *Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo.*

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4,\cdot\right)$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U=\{(x,y,z,t)\mid y+t=0,\ z=0\}\ \text{ e } W_k=L\left([(0,k,0,1),(1,-1,1,0)]\right)$$

(i) Dire per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W_k.
(ii) Determinare una base di $U\cap W_k$ quando $\dim(U\cap W_k)>1$ con $k\in\mathbb{R}$.
(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana di $W_0^\perp$ e una base T di $W_0+W_0^\perp$.
(iv) Determinare i vettori di W_0 che sono ortogonali al vettore $u=(-1,0,0,1)$.

(i) Una base di U la si trova risolvendo il sistema di equazioni lineari che individuate da U (sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 4 variabili): $\begin{cases} y+t=0\\ z=0\end{cases}\iff\begin{cases} y=-t\\ z=0\end{cases}\iff\begin{cases} x=l\\ y=-m\\ z=0\\ t=m\end{cases}$.

Possiamo scrivere che $U=\{(l,-m,0,m)\mid l,m\in\mathbb{R}\}$, quindi $\dim U=2$ e una sua base è costituita dal sistema $H=[(1,0,0,0),(0,-1,0,1)]$. Si osserva facilmente W_k ha sempre dimensione 2 in quanto la matrice $M=\begin{pmatrix}0&k&0&1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$ ha rango 2 $\forall k\in\mathbb{R}$. Una base di W_k è il sistema $S_k=[(0,k,0,1),(1,-1,1,0)$.
Non resta che studiare la dimensione dello spazio vettoriale $U+W_k$ analizzando il rango della matrice $B_k=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&1\\0&k&0&1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$, applicando Laplace si trova facilemente che $|B_k|=k+1$. Evidente che per $k\neq-1$ si ha $\dim(U+W_k)=4$. Osserviamo che applicando la formula di Grassmann si trova: $\dim(U\cap W_k)=\dim U+\dim W_k-\dim(U+W_k)=2+2-4=0$. Possiamo concludere che per $k\neq-1$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W_k.

(ii) Questo punto poteva creare qualche difficoltà, forse ragionando si risolve facilmente.

Sappiamo che $\forall k\neq-1\Longrightarrow\dim(U\cap W_k)=0$, non resta che studiare il caso $k=-1$.

Osserviamo che la matrice $B_{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&1\\0&-1&0&1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$ ha rango 3 e sempre per la formula di Grassmann si trova $\dim(U\cap W_{-1})=1$, in maniera esplicita: $\dim(U\cap W_k)=\dim U+\dim W_k-\dim(U+W_k)=2+2-3=1$.

Quindi al più la dimensione dell'intersezione è 1. La base cercata non esiste in quanto si chiede di determinare una base di $U\cap W_k$ quando $\dim(U\cap W_k)>1$ ovvero $\dim(U\cap W_k)\geq 2$. Se qualche studente ha eseguito il calcolo quando $\dim(U\cap W_k)=1$ va bene lo stesso e per completezza lo riporto.

Per determinare una base di $U\cap W_{-1}$ si può scrivere una rappresentazione cartesiana di W_{-1} e poi risolvere il sistema lineare omogeneo costituito dalle equazione che caratterizzano U e W_{-1}.

Intanto $W_{-1}=\{(b,-a-b,b,a)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$, eliminando i parametri si trova $W_{-1}=(x,y,z,t)\mid y+z+t=0,x-z=0\}$. Ora risolviamo il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} y+t=0\\ z=0\\ y+z+t=0\\ x-z=0\end{cases}$, si risolve facilmente $\begin{cases} x=0\\ y=-t\\ z=0\end{cases}$ e in definitiva possiamo scrivere che $U\cap W_k=\{(0,-l,0,l)\mid l\in\mathbb{R}\}$ e una base è data dal sistema $B=[(0,-1,0,1)]$.

(iii) Una rappresentazione cartesiana di $W_0^\perp$ è la seguente: $W_0^\perp = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t)\cdot(0,0,0,1)=0$ e $(x,y,z,t)\cdot(1,-1,1,0)=0\}$, in forma più compatta $W_0^\perp = \{(x,y,z,t) \mid t=0 \text{ e } x-y+z=0\}$. Sappiamo che una base di $W_0 + W_0^\perp$ si ottiene costruendo un sistema di vettori con la base di W_0 e la base di $W_0^\perp$.

Per determinare una base di $W_0^\perp$ risolviamo il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} t=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$, si trova facilmente che $W_0^\perp = \{(y-z,y,z,0) \mid y,z\in\mathbb{R}\} = L([(1,1,0,0),(-1,0,1,0)])$, dunque $S=[(1,1,0,0),(-1,0,1,0)]$ è una base di $W_0^\perp$.

La base di $W_0+W_0^\perp$ è la seguente: $T=[(0,0,0,1),(1,-1,1,0),(1,1,0,0),(-1,0,1,0)]$.

(iv) Un generico vettore di W_0 è del seguente tipo: $w_{a,b} = a(0,0,0,1)+b(1,-1,1,0) = (b,-b,b,a)$, affinchè quest'ultimo vettore sia ortogonale al vettore $u=(-1,0,0,1)$ deve valere la relazione $(b,-b,b,a)\cdot(-1,0,0,1)=0 \iff -b+a=0 \iff a=b \iff$ i vettori che soddisfano la condizione richiesta sono del tipo $w_{b,b}=b(0,0,0,1)+b(1,-1,1,0)=(b,-b,b,b)$. In definitiva i vettori che soddisfano la condizione richiesta appartengono al sottospazio vettoriale $N=L[(1,-1,1,1)]$.

- **2**. Sia assegnata la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

(i) Determinare se esistono, con $k\in\mathbb{R}$, matrici $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X\neq\mathbf{0}$ tale che $A_kX=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Determinare, se esiste, una matrice B che verifica la relazione $A_0\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Dobbiamo determinare le soluzioni non nulle del seguente sistema lineare omogeneo: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dal teorema di Cramer si deduce che tale sistema ammette l'unica soluzione banale $\iff \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}\neq 0 \iff k+1\neq 0 \iff k\neq -1$. Concludiamo che se $k\neq -1$ non esiste nessun vettore non nullo $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che verifica la relazione $A_kX=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le soluzioni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X\neq\mathbf{0}$ richieste esistono per $k=-1$, in tal caso un generatore dell'insieme delle soluzioni si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\lambda=1, \mu=1, \nu=1$. In definitiva tutte le matrici del tipo $X_\rho=\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \end{pmatrix}$ e con $\rho\in\mathbb{R}-\{0\}$ sono le soluzioni del quesito posto.

(ii) La relazione $A_0\cdot B=I$ ci riporta alla definizione di inversa di una matrice. La matrice B esiste $\Leftrightarrow$ la matrice A_0 ha determinante non nullo.

Il risultato al punto precedente ci dice $|A_0| = 1$, dunque $B = A_0^{-1}$. Utilizzando uno dei metodi descritti nelle note del sito si trova:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **3**. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale reale canonico con base $C = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con le seguenti assegnazioni:

$$f(1,0,0) = (-1,1,0) \qquad f(0,1,0) = (1,0,1) \qquad f(0,0,1) = (0,1,1)$$

(i) Determinare una base di $K\text{erf}$ e $\text{Im}\, f$.
(ii) Calcolare la controimmagine del vettore $(1,-1,0)$.

(i) Scriviamo la matrice che rappresenta f nella base assegnata: $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, le colonne di questa matrice costituiscono un sistema di generatori di $\text{Im}\, f$. Intanto tale matrice è singolare perchè il suo determinante è nullo (osserva che la terza colonna $c_3 = c_1 + c_2$). Questo vuol dire che le colonne di A_f sono linearmente dipendenti, le prime due colonne costituiscono un sistema indipendente e concludiamo che una di $\text{Im}\, f$ è data dal sistema $S = [(-1,1,0),(1,0,1)]$. Se il sottopazio vettoriale immagine ha dimensione 2 vuol dire che $K\text{erf}$ ha dimensione 1.

Le componenti dei vettori del nucleo si determinano in corrispondenza del sistema: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il sistema risulta essere: $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Un generatore dello spazio delle soluzioni è il vettore $u = (1,1,-1)$. Possiamo concludere che una base di $K\text{erf}$ è data dal sistema $T = [(1,1,-1)]$

(ii) Per determinare la controimmagine del vettore $(1,-1,0)$ dobbiamo determinare i vettori v di $\mathbb{R}^3$ le cui immagini $f(v)$ coincidono una con $(1,-1,0)$. Anche in questo caso la matrice A_f ci viene in aiuto. Conosciamo benissimo il ruolo che riveste $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Concludiamo che dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x + z = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$, le soluzioni del sistema si trovano facilmente e sono $S = \{(-h-1,-h,h) \mid h \in R\}$. La controimmagine di $(1,-1,0)$ sarà costituita dai vettori di $\mathbb{R}^3$ del tipo $v = (-h-1,-h,h)$ con $h \in \mathbb{R}$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (-2x - 3z, 3x + y + 3z, z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $\Sigma = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f e determinare, nel caso sia diagonalizzabile, una base B di autovettori e una matrice P che diagonalizza A_f.

(i) Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:
$f(0,1,0) = (0,1,0)$;

$f(1,0,0) = (-2,3,0);$
$f(0,0,1) = (-3,3,1);$

La base canonica si ottiene effettuando una permuatzione sui vettori assegnati, le componenti seguono la stessa regola: $2 \hookrightarrow 1 \hookrightarrow 3$.

La matrice A_f si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:

$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e il punto (i) è risolto.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, si ha:

$A_f - I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{y + z = 0$. L'autospazio $V_1 = \{(x, -z, z)$ con $x, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,-1,1)$, quindi $V_1 = L[(1,0,0),(0,-1,1)]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = -2$. Utilizzando la matrice $A_f + 2I$, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$A_f + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. L'autospazio $V_{-2} = \{(x, -x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,-1,0)$, quindi $V_{-2} = L[(1,-1,0)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Vedere quanto detto nelle note del sito a riguardo o nelle soluzioni di prove assegnate in precedenza.

Una base di autovettori è la seguente: $T = [(0,1,0),(-1,0,1),(-1,1,0)]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$P \equiv (2,1,-1)$ $\quad r: \begin{cases} x=2 \\ y=-1-t \\ z=-t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x-z=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\quad \alpha: x-2y-z=-1$

(i) Determinare la retta l per P ortogonale a r e complanare con s.
(ii) Determinare la retta m per P parallela al piano α e ortogonale alla retta s.
(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t per P ortogonale a α.
(iv) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r,s)$.

(i) La retta r ha direzione individuata dal vettore $\overrightarrow{r}=(0,1,1)$, la direzione di s si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $\overrightarrow{s}=(1,1,1)$,le componenti di un vettore ortogonale al piano α sono date da $\overrightarrow{\alpha}=(1,-2,-1)$.

Tali elementi sono stati calcolati perchè utili nel prosieguo.

La retta l cercata si trova nel piano γ_1 per P e perpendicolare a r e nel piano γ_2 per P contenente s, dunque $l=\gamma_1\cap\gamma_2$.

Determiniamo il piano $\gamma_1: 0(x-2)+1(y-1)+1(z+1)=0 \Longleftrightarrow y+z=0$, $\gamma_1: y+z=0$.

Determiniamo il piano $\gamma_2: \lambda(x-z-1)+\mu(x-y)=0 \Longleftrightarrow 2\lambda+\mu=0$, ponendo $\mu=2$ e $\lambda=-1$ si ottiene $\gamma_2: x-2y+z=-1$.

In definitiva la retta l ha equazione: $l: \begin{cases} y+z=0 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$.

(ii) La retta m cercata si trova nel piano ρ_1 per P e parallelo a α e nel piano ρ_2 per P perpendicolare a s, dunque $m=\rho_1\cap\rho_2$.

Determiniamo il piano $\rho_1: (x-2)-2(y-1)-(z+1)=0 \Longleftrightarrow \rho_1: x-2y-z=1$.

Determiniamo il piano $\rho_2: 1(x-2)+1(y-1)+1(z+1)=0 \Longleftrightarrow -x+y-z+2=0 \Longleftrightarrow \rho_2: x+y+z=2$.

In definitiva la retta ha equazione: $m: \begin{cases} x-2y-z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

(iii) Bisogna determinare la retta per P avente la direzione $\overrightarrow{\alpha}=(1,-2,-1)$, si ottiene la rappresentazione parametrica: $t: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-1-t \end{cases}$ e quindi una rappresentazione cartesiana $t: \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$.

(iv) I parametri direttori di r sono $\overrightarrow{r}=(0,1,1)$ e i parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s}=(1,1,1)$, dunque le rette non sono parallele. Si vede facilmente che le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili, possiamo concludere che le rette sono sghembe.

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda=0$, $\mu=1$, $\nu=-1$, quindi $\overrightarrow{n}=(0,1,-1)$.

Il generico punto di r è descritto da $P_t=(2,-1-t,-t)$, con non molte difficoltà si scrive una rappresentazione parametrica di s : $\begin{cases} x=1+t' \\ y=1+t' \\ z=t' \end{cases}$ e quindi il generico punto di s è descritto da

$Q_{t'} = (1+t', 1+t', t')$. Ora consideriamo le componenti del vettore $\overrightarrow{P_t Q_{t'}} = (t'-1, 2+t'+t, t+t')$ e imponiamo la condizione che le componenti di tale vettore siano proporzionali alla direzione normale $\overrightarrow{n} = (0,1,-1)$; una tale condizione è soddisfatta se la matrice $N = \begin{pmatrix} t'-1 & 2+t'+t & t+t' \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 1. La condizione è verificata (teorema degli orlati) se $\begin{cases} \begin{vmatrix} t'-1 & 2+t'+t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 2+t'+t & t+t' \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t'-1=0 \\ -2t-2t'-2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t'=1 \end{cases}$.

Il punto cercato della retta r ha coordinate $P = (2,1,2)$. Il punto cercato della retta s ha coordinate $Q = (2,2,1)$.

Questo ci permette di calcolare la distanza tra le due rette: $d(r,s) = d(P,Q) = \sqrt{2}$.

Un'equazione parametrica della retta n è la seguente: $n : \begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$, una forma cartesiana è la seguente: $n : \begin{cases} x=2 \\ y+z=3 \end{cases}$.

Nelle soluzioni di altre prove è esposto un metodo alternativo a questo.