Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 13 Settembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

Istruzioni: *Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo.*

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(x, y, z, t) \mid x = 0,\ y + z = 0\} \text{ e } W_k = L\left([(0, k, 1, 0), (1, -1, 0, 1)]\right)$$

(i) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W_k.
(ii) Determinare una base di $U \cap W_k$ quando $\dim(U \cap W_k) > 1$ con $k \in \mathbb{R}$.
(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana di $W_0^\perp$ e una base T di $W_0 + W_0^\perp$.
(iv) Determinare i vettori di W_0 che sono ortogonali al vettore $u = (-1, 1, 1, 0)$.

(i) Una base di U la si trova risolvendo il sistema di equazioni lineari che individuate da U (sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 4 variabili): $\left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = -z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = -l \\ z = l \\ t = m \end{array}\right.$. Possiamo scrivere che $U = \{(0, -l, l, m) \mid l, m \in \mathbb{R}\}$, quindi $\dim U = 2$ e una sua base è costituita dal sistema $H = [(0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$. Si osserva facilmente W_k ha sempre dimensione 2 in quanto la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\forall k \in \mathbb{R}$. Una base di W_k è il sistema $S_k = [(0, k, 1, 0), (1, -1, 0, 1)$. Non resta che studiare la dimensione dello spazio vettoriale $U + W_k$ analizzando il rango della matrice $B_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, applicando Laplace si trova facilmente che $|B_k| = -k - 1$. Evidente che per $k \neq -1$ si ha $\dim(U + W_k) = 4$. Osserviamo che applicando la formula di Grassmann si trova: $\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim W_k - \dim(U + W_k) = 2 + 2 - 4 = 0$. Possiamo concludere che per $k \neq -1$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W_k.

(ii) Questo punto poteva creare qualche difficoltà, forse ragionando si risolve facilmente.

Sappiamo che $\forall k \neq -1 \Longrightarrow \dim(U \cap W_k) = 0$, non resta che studiare il caso $k = -1$.

Osserviamo che la matrice $B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 e sempre per la formula di Grassmann si trova $\dim(U \cap W_{-1}) = 1$, in maniera esplicita: $\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim W_k - \dim(U + W_k) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Quindi al più la dimensione dell'intersezione è 1. La base cercata non esiste in quanto si chiede di determinare una base di $U \cap W_k$ quando $\dim(U \cap W_k) > 1$ ovvero $\dim(U \cap W_k) \geq 2$. Se qualche studente ha eseguito il calcolo quando $\dim(U \cap W_k) = 1$ va bene lo stesso e per completezza lo riporto.

Per determinare una base di $U \cap W_{-1}$ si può scrivere una rappresentazione cartesiana di W_{-1} e poi risolvere il sistema lineare omogeneo costituito dalle equazione che caratterizzano U e W_{-1}.

Intanto $W_{-1} = \{(b, -a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, eliminando i parametri si trova $W_{-1} = (x, y, z, t) \mid y + z + t = 0, x - t = 0\}$. Ora risolviamo il sistema lineare omogeneo: $\left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{array}\right.$, si risolve facilmente $\left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = -z \\ t = 0 \end{array}\right.$ e in definitiva possiamo scrivere che $U \cap W_k = \{(0, -l, l, 0) \mid l \in \mathbb{R}\}$ e una base è data dal sistema $B = [(0, 1, -1, 0)]$.

(iii) Una rappresentazione cartesiana di $W_0^\perp$ è la seguente: $W_0^\perp = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t)\cdot(0,0,1,0) = 0$ e $(x,y,z,t)\cdot(1,-1,0,1) = 0\}$, in forma più compatta $W_0^\perp = \{(x,y,z,t) \mid z = 0$ e $x - y + t = 0\}$. Sappiamo che una base di $W_0 + W_0^\perp$ si ottiene costruendo un sistema di vettori con la base di W_0 e la base di $W_0^\perp$.

Per determinare una base di $W_0^\perp$ risolviamo il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$, si trova facilmente che $W_0^\perp = \{(y-t, y, 0, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\} = L([(1,1,0,0), (-1,0,0,1)])$, dunque $S = [(1,1,0,0), (-1,0,0,1)]$ è una base di $W_0^\perp$.

La base di $W_0 + W_0^\perp$ è la seguente: $T = [(0,0,1,0), (1,-1,0,1), (1,1,0,0), (-1,0,0,1)]$.

(iv) Un generico vettore di W_0 è del seguente tipo: $w_{a,b} = a(0,0,1,0) + b(1,-1,0,1) = (b,-b,a,b)$, affinchè quest'ultimo vettore sia ortogonale al vettore $u = (-1,1,1,0)$ deve valere la relazione $(b,-b,a,b)\cdot(-1,1,1,0) = 0 \iff -b - b + a = 0 \iff a = 2b \iff$ i vettori che soddisfano la condizione richiesta sono del tipo $w_{2b,b} = 2b(0,0,1,0) + b(1,-1,0,1) = (b,-b,2b,b)$. In definitiva i vettori che soddisfano la condizione richiesta appartengono al sottospazio vettoriale $N = L[(1,-1,2,1)]$.

- **2**. Sia assegnata la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare se esistono, con $k \in \mathbb{R}$, matrici $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X \neq \mathbf{0}$ tale che $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Determinare, se esiste, una matrice B che verifica la relazione $A_0 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Dobbiamo determinare le soluzioni non nulle del seguente sistema lineare omogeneo: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dal teorema di Cramer si deduce che tale sistema ammette l'unica soluzione banale $\iff \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff 1 - k \neq 0 \iff k \neq 1$. Concludiamo che se $k \neq 1$ non esiste nessun vettore non nullo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che verifica la relazione $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le soluzioni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X \neq \mathbf{0}$ richieste esistono per $k = 1$, in tal caso un generatore dell'insieme delle soluzioni si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\lambda = -1, \mu = 0, \nu = -1$. In definitiva tutte le matrici del tipo $X_\rho = \begin{pmatrix} -\rho \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix}$ e con $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ sono le soluzioni del quesito posto.

(ii) La relazione $A_0 \cdot B = I$ ci riporta alla definizione di inversa di una matrice. La matrice B esiste $\Leftrightarrow$ la matrice A_0 ha determinante non nullo.

Il risultato al punto precedente ci dice $|A_0| = 1$, dunque $B = A_0^{-1}$. Utilizzando uno dei metodi descritti nelle note del sito si trova:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- **3**. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale reale canonico con base $C = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con le seguenti assegnazioni:

$$f(1,0,0) = (1,0,1) \qquad f(0,1,0) = (-1,1,0) \qquad f(0,0,1) = (0,1,1)$$

(i) Determinare una base di $K\mathrm{erf}$ e $\mathrm{Im}\, f$.

(ii) Calcolare la controimmagine del vettore $(-1,1,0)$.

(i) Scriviamo la matrice che rappresenta f nella base assegnata: $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le colonne di questa matrice costituiscono un sistema di generatori di $\mathrm{Im}\, f$. Intanto tale matrice è singolare perchè il suo determinante è nullo (osserva che la terza colonna $c_3 = c_1 + c_2$). Questo vuol dire che le colonne di A_f sono linearmente dipendenti, le prime due colonne costituiscono un sistema indipendente e concludiamo che una di $\mathrm{Im}\, f$ è data dal sistema $S = [(1,0,1),(-1,1,0)]$. Se il sottopazio vettoriale immagine ha dimensione 2 vuol dire che $K\mathrm{erf}$ ha dimensione 1.

Le componenti dei vettori del nucleo si determinano in corrispondenza del sistema: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il sistema risulta essere: $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Un generatore dello spazio delle soluzioni è il vettore $u = (1,1,-1)$. Possiamo concludere che una base di $K\mathrm{erf}$ è data dal sistema $T = [(1,1,-1)]$

(ii) Per determinare la controimmagine del vettore $(-1,1,0)$ dobbiamo determinare i vettori v di $\mathbb{R}^3$ le cui immagini $f(v)$ coincidono una con $(-1,1,0)$. Anche in questo caso la matrice A_f ci viene in aiuto. Conosciamo benissimo il ruolo che riveste $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Concludiamo che dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} x - y = -1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$, le soluzioni del sistema si trovano facilmente e sono $S = \{(-h, 1-h, h) \mid h \in R\}$. La controimmagine di $(-1,1,0)$ sarà costituita dai vettori di $\mathbb{R}^3$ del tipo $v = (-h, 1-h, h)$ con $h \in \mathbb{R}$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (-x, -3x - y - 3z, 3x + 2z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $\Sigma = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f e determinare, nel caso sia diagonalizzabile, una base B di autovettori e una matrice P che diagonalizza A_f.

(i) Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:

$f(0,1,0) = (0,-1,0)$;
$f(1,0,0) = (-1,-3,3)$;
$f(0,0,1) = (0,-3,2)$;

La base canonica si ottiene effettuando una permuatzione sui vettori assegnati, le componenti seguono la stessa regola: $2 \hookrightarrow 1 \hookrightarrow 3$.

La matrice A_f si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:

$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e il punto (i) è risolto.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, si ha:

$A_f + I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{y + z = 0$. L'autospazio $V_{-1} = \{(x, -z, z) \text{ con } x, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,-1,1)$, quindi $V_{-1} = L\left[(1,0,0),(0,-1,1)\right]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 2$. Utilizzando la matrice $A_f - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$A_f - 2I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \end{cases}$. L'autospazio $V_2 = \{(x,0,-x) \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,0,-1)$, quindi $V_2 = L\left[(1,0,-1)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_fP = D$ dove $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Vedere quanto detto nelle note del sito a riguardo o nelle soluzioni di prove assegnate in precedenza.

Una base di autovettori è la seguente: $T = \left[(0,1,0),(-1,0,1),(0,1,-1)\right]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,1,2) \qquad r: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1+t \\ z = -t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y+z=0 \\ x-z=1 \end{cases} \qquad \alpha : x+2y-z=-1$$

(i) Determinare la retta l per P ortogonale a r e complanare con s.
(ii) Determinare la retta m per P parallela al piano α e ortogonale alla retta s.
(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t per P ortogonale a α.
(iv) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r,s)$.

(i) La retta r ha direzione individuata dal vettore $\overrightarrow{r} = (0,1,-1)$, la direzione di s si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi $\overrightarrow{s} = (-1,1,-1)$,le componenti di un vettore ortogonale al piano α sono date da $\overrightarrow{\alpha} = (1,2,-1)$.

Tali elementi sono stati calcolati perchè utili nel prosieguo.

La retta l cercata si trova nel piano γ_1 per P e perpendicolare a r e nel piano γ_2 per P contenente s, dunque $l = \gamma_1 \cap \gamma_2$.

Determiniamo il piano $\gamma_1 : 0(x-1)+1(y-1)-1(z-2) = 0 \Longleftrightarrow y-z+1=0 \Longleftrightarrow \gamma_1 : y-z=-1$.

Determiniamo il piano $\gamma_2 : \lambda(y+z)+\mu(x-z-1) = 0 \Longleftrightarrow 3\lambda - 2\mu = 0$, ponendo $\mu = 3$ e $\lambda = 2$ si ottiene $\gamma_2 : 3x+2y-z=3$.

In definitiva la retta l ha equazione: $l: \begin{cases} y-z=-1 \\ 3x+2y-z=3 \end{cases}$.

(ii) La retta m cercata si trova nel piano ρ_1 per P e parallelo a α e nel piano ρ_2 per P perpendicolare a s, dunque $m = \rho_1 \cap \rho_2$.

Determiniamo il piano $\rho_1 : (x-1)+2(y-1)-(z-2) = 0 \Longleftrightarrow \rho_1 : x+2y-z=1$.

Determiniamo il piano $\rho_2 : -1(x-1)+1(y-1)-1(z-2) = 0 \Longleftrightarrow -x+y-z+2=0 \Longleftrightarrow \rho_2 : x-y+z=2$.

In definitiva la retta ha equazione: $m: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$.

(iii) Bisogna determinare la retta per P avente la direzione $\overrightarrow{\alpha} = (1,2,-1)$, si ottiene la rappresentazione parametrica: $t: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-t \end{cases}$ e quindi una rappresentazione cartesiana $t: \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

(iv) I parametri direttori di r sono $\overrightarrow{r} = (0,1,-1)$ e i parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (-1,1,-1)$, dunque le rette non sono parallele. Si vede facilmente che le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili, possiamo concludere che le rette sono sghembe.

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, quindi $\overrightarrow{n} = (0,1,1)$.

Il generico punto di r è descritto da $P_t = (2, -1+t, -t)$, con non molte difficoltà si scrive una rappresentazione parametrica di s : $\begin{cases} x = 1+t' \\ y = -t' \\ z = t' \end{cases}$ e quindi il generico punto di s è descritto da $Q_{t'} = (1+t', -t', t')$. Ora consideriamo le componenti del vettore $\overrightarrow{P_tQ_{t'}} = (t'-1, 1-t'-t, t+t')$ e imponiamo la condizione che le componenti di tale vettore siano proporzionali alla direzione normale $\overrightarrow{n} = (0,1,1)$; una tale condizione è soddisfatta se la matrice $N = \begin{pmatrix} t'-1 & 1-t'-t & t+t' \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 1. La condizione è verificata (teorema degli orlati) se $\begin{cases} \begin{vmatrix} t'-1 & 1-t'-t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1-t'-t & t+t' \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t'-1 = 0 \\ 1-2t'-2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ t' = 1 \end{cases}$.

Il punto cercato della retta r ha coordinate $P = \left(2, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Il punto cercato della retta s ha coordinate $Q = (2, -1, 1)$.

Questo ci permette di calcolare la distanza tra le due rette: $d(r,s) = d(P,Q) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Un'equazione parametrica della retta n è la seguente: $n : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases}$, una forma cartesiana è la seguente: $n : \begin{cases} x = 2 \\ y - z = -2 \end{cases}$.

Nelle soluzioni di altre prove è esposto un metodo alternativo a questo.