

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 13 Settembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

Istruzioni: Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo.

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, t = 0\} \text{ e } W_k = L([(k, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)])$$

- Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 è somma diretta di U e W_k .
- Determinare una base di $U \cap W_k$ quando $\dim(U \cap W_k) > 1$ con $k \in \mathbb{R}$.
- Determinare una rappresentazione cartesiana di W_0^\perp e una base T di $W_0 + W_0^\perp$.
- Determinare i vettori di W_0 che sono ortogonali al vettore $u = (0, 1, 1, 0)$.

- Una base di U la si trova risolvendo il sistema di equazioni lineari che individuate da U (sistema

lineare omogeneo di 2 equazioni in 4 variabili):
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -l \\ y = l \\ z = m \\ t = 0 \end{cases} .$$

Possiamo scrivere che $U = \{(-l, l, m, 0) \mid l, m \in \mathbb{R}\}$, quindi $\dim U = 2$ e una sua base è costituita dal sistema $H = [(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$. Si osserva facilmente W_k ha sempre dimensione 2 in quanto la matrice

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha rango } 2 \forall k \in \mathbb{R}. \text{ Una base di } W_k \text{ è il sistema } S_k = [(k, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)].$$

Non resta che studiare la dimensione dello spazio vettoriale $U + W_k$ analizzando il rango della matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ applicando Laplace si trova facilmente che } |B_k| = k + 1. \text{ Evidente che}$$

per $k \neq -1$ si ha $\dim(U + W_k) = 4$. Osserviamo che applicando la formula di Grassmann si trova:

$\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim W_k - \dim(U + W_k) = 2 + 2 - 4 = 0$. Possiamo concludere che per $k \neq -1$ lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 è somma diretta di U e W_k .

- Questo punto poteva creare qualche difficoltà, forse ragionando si risolve facilmente.

Sappiamo che $\forall k \neq -1 \implies \dim(U \cap W_k) = 0$, non resta che studiare il caso $k = -1$.

Osserviamo che la matrice $B_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 e sempre per la formula di Grassmann si

trova $\dim(U \cap W_{-1}) = 1$, in maniera esplicita: $\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim W_k - \dim(U + W_k) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Quindi al più la dimensione dell'intersezione è 1. La base cercata non esiste in quanto si chiede di determinare una base di $U \cap W_k$ quando $\dim(U \cap W_k) > 1$ ovvero $\dim(U \cap W_k) \geq 2$. Se qualche studente ha eseguito il calcolo quando $\dim(U \cap W_k) = 1$ va bene lo stesso e per completezza lo riporto.

Per determinare una base di $U \cap W_{-1}$ si può scrivere una rappresentazione cartesiana di W_{-1} e poi risolvere il sistema lineare omogeneo costituito dalle equazioni che caratterizzano U e W_{-1} .

Intanto $W_{-1} = \{(-a - b, a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, eliminando i parametri si trova $W_{-1} = \{(x, y, z, t) \mid$

$$x + y + z = 0, z - t = 0\}. \text{ Ora risolviamo il sistema lineare omogeneo: } \begin{cases} x + y = 0 \\ t = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}, \text{ si risolve facilmente}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \text{ e in definitiva possiamo scrivere che } U \cap W_k = \{(-l, l, 0, 0) \mid l \in \mathbb{R}\} \text{ e una base è data dal sistema}$$
$$B = [(-1, 1, 0, 0)].$$

(iii) Una rappresentazione cartesiana di W_0^\perp è la seguente: $W_0^\perp = \{(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0 \text{ e } (x, y, z, t) \cdot (-1, 0, 1, 1) = 0\}$, in forma più compatta $W_0^\perp = \{(x, y, z, t) \mid y = 0 \text{ e } x - z - t = 0\}$. Sappiamo che una base di $W_0 + W_0^\perp$ si ottiene costruendo un sistema di vettori con la base di W_0 e la base di W_0^\perp .

Per determinare una base di W_0^\perp risolviamo il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} y = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases}$, si trova facilmente che $W_0^\perp = \{(z + t, 0, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = L[(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$, dunque $S = [(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$ è una base di W_0^\perp .

La base di $W_0 + W_0^\perp$ è la seguente: $T = [(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$.

(iv) Un generico vettore di W_0 è del seguente tipo: $w_{a,b} = a(0, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 1, 1) = (-b, a, b, b)$, affinché quest'ultimo vettore sia ortogonale al vettore $u = (0, 1, 1, 0)$ deve valere la relazione $(-b, a, b, b) \cdot (0, 1, 1, 0) = 0 \iff a + b = 0 \iff a = -b \iff$ i vettori che soddisfano la condizione richiesta sono del tipo $w_{-b,b} = -b(0, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 1, 1) = (-b, -b, b, b)$. In definitiva i vettori che soddisfano la condizione richiesta appartengono al sottospazio vettoriale $N = L[(1, 1, -1, -1)]$.

- 2. Sia assegnata la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare se esistono, con $k \in \mathbb{R}$, matrici $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X \neq \mathbf{0}$ tale che $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Determinare, se esiste, una matrice B che verifica la relazione $A_0 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Dobbiamo determinare le soluzioni non nulle del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dal teorema di Cramer si deduce che tale sistema ammette l'unica soluzione banale $\iff \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff k - 1 \neq 0 \iff k \neq 1$. Concludiamo che se $k \neq 1$ non esiste nessun

vettore non nullo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che verifica la relazione $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le soluzioni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X \neq \mathbf{0}$ richieste esistono per $k = 1$, in tal caso un generatore dell'insieme delle soluzioni si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$\lambda = 1, \mu = 1, \nu = -1$. In definitiva tutte le matrici del tipo $X_\rho = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ -\rho \end{pmatrix}$ e con $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ sono le soluzioni del quesito posto.

(ii) La relazione $A_0 \cdot B = I$ ci riporta alla definizione di inversa di una matrice. La matrice B esiste \iff la matrice A_0 ha determinante non nullo.

Il risultato al punto precedente ci dice $|A_0| = -1$, dunque $B = A_0^{-1}$. Utilizzando uno dei metodi descritti nelle note per determinare l'inversa di una matrice si trova:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **3.** Sia \mathbb{R}^3 lo spazio vettoriale reale canonico con base $C = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con le seguenti assegnazioni:

$$f(1, 0, 0) = (0, 1, 1) \quad f(0, 1, 0) = (1, 0, 1) \quad f(0, 0, 1) = (-1, 1, 0)$$

- (i) Determinare una base di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
- (ii) Calcolare la controimmagine del vettore $(0, -1, 1)$.

(i) Scriviamo la matrice che rappresenta f nella base assegnata: $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le colonne

di questa matrice costituiscono un sistema di generatori di $\text{Im } f$. Intanto tale matrice è singolare perchè il suo determinante è nullo (osserva che la terza colonna $c_3 = c_1 - c_2$). Questo vuol dire che le colonne di A_f sono linearmente dipendenti, le prime due colonne costituiscono un sistema indipendente e concludiamo che una di $\text{Im } f$ è data dal sistema $S = [(0, 1, 1), (1, 0, 1)]$. Se il sottospazio vettoriale immagine ha dimensione 2 vuol dire che $\text{Ker } f$ ha dimensione 1.

Le componenti dei vettori del nucleo si determinano in corrispondenza del sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il sistema risulta essere: $\begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Un generatore dello spazio delle soluzioni è il vettore $u = (-1, 1, 1)$. Possiamo concludere che una base di $\text{Ker } f$ è data dal sistema $T = [(1, -1, -1)]$

(ii) Per determinare la controimmagine del vettore $(0, -1, 1)$ dobbiamo determinare i vettori v di \mathbb{R}^3 le cui immagini $f(v)$ coincidono una con $(0, -1, 1)$. Anche in questo caso la matrice A_f ci viene in aiuto. Conosciamo benissimo il ruolo che riveste $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Concludiamo

che dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, tale sistema è incompatibile e quindi la controimmagine del vettore $(0, -1, 1)$ è l'insieme vuoto, in simboli $f^{-1}(\{(0, -1, 1)\}) = \emptyset$.

- **4.** Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (3x + y + 2z, 2y, -x - y)$$

- (i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $\Sigma = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$.
- (ii) Studiare la diagonalizzabilità di f e determinare, nel caso sia diagonalizzabile, una base B di autovettori e una matrice P che diagonalizza A_f .

(i) Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:

$$\begin{aligned} f(0, 1, 0) &= (1, 2, -1); \\ f(1, 0, 0) &= (3, 0, -1); \\ f(0, 0, 1) &= (2, 0, 0); \end{aligned}$$

La base canonica si ottiene effettuando una permutazione sui vettori assegnati, le componenti seguono la stessa regola: $2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3$.

La matrice A_f si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e il punto (i) è risolto.}$$

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

$$\text{Ponendo } A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}, \text{ si ha:}$$

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) [\lambda^2 - 3\lambda + 2]$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, si ha:

$$A_f - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \implies \{x + y + 2z = 0\}. \text{ L'autospazio } V_2 = \{(-y - 2z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$$

e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (-1, 1, 0)$ e $u_2 = (-2, 0, 1)$, quindi $V_2 = L[(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 1$. Utilizzando la matrice $A_f - I$, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$$A_f - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}. \text{ L'autospazio } V_1 = \{(0, -z, z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$

una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (0, -1, 1)$, quindi $V_1 = L[(0, -1, 1)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$$P^{-1}A_fP = D \text{ dove } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ infatti si ha:}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remark 1 OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Vedere quanto detto nelle note del sito a riguardo o nelle soluzioni di prove assegnate in precedenza.

Una base di autovettori è la seguente: $T = [(1, -1, 0), (0, -2, 1), (-1, 0, 1)]$.

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -2, 1) \quad r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} y - z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \alpha : x - y - 2z = -1$$

- Determinare la retta l per P ortogonale a r e complanare con s .
- Determinare la retta m per P parallela al piano α e ortogonale alla retta s .
- Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t per P ortogonale a α .
- Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s . Calcolare $d(r, s)$.

(i) La retta r ha direzione individuata dal vettore $\vec{r} = (1, -1, 0)$, la direzione di s si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $\vec{s} = (1, -1, -1)$, le componenti di un vettore ortogonale al piano α sono date da $\vec{\alpha} = (1, -1, -2)$.

Tali elementi sono stati calcolati perchè utili nel prosieguo.

La retta l cercata si trova nel piano γ_1 per P e perpendicolare a r e nel piano γ_2 per P contenente s , dunque $l = \gamma_1 \cap \gamma_2$.

Determiniamo il piano $\gamma_1 : 1(x - 1) - 1(y + 2) + 0(z - 1) = 0 \iff x + y + 1 = 0 \iff \gamma_1 : x - y = 3$.

Determiniamo il piano $\gamma_2 : \lambda(y - z - 1) + \mu(x + y) = 0 \iff -4\lambda - \mu = 0 \iff \mu = -4\lambda$, ponendo $\mu = 4$ e $\lambda = -1$ si ottiene $\gamma_2 : 4x + 3y + z = -1$.

In definitiva la retta l ha equazione: $l : \begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 3y + z = -1 \end{cases}$.

(ii) La retta m cercata si trova nel piano ρ_1 per P e parallelo a α e nel piano ρ_2 per P perpendicolare a s , dunque $m = \rho_1 \cap \rho_2$.

Determiniamo il piano $\rho_1 : (x - 1) - (y + 2) - 2(z - 1) = 0 \iff \rho_1 : x - y - 2z = 1$.

Determiniamo il piano $\rho_2 : 1(x - 1) - 1(y + 2) - 1(z - 1) = 0 \iff x - y - z - 2 = 0 \iff \rho_2 : x - y - z = 2$.

In definitiva la retta ha equazione: $m : \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$.

(iii) Bisogna determinare la retta per P avente la direzione $\vec{\alpha} = (1, -1, -2)$, si ottiene la rappresentazione parametrica: $t : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ e quindi una rappresentazione cartesiana $t : \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$.

(iv) I parametri direttori di r sono $\vec{r} = (1, -1, 0)$ e i parametri direttori di s sono $\vec{s} = (1, -1, -1)$, dunque le rette non sono parallele. Si vede facilmente che le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili, possiamo concludere che le rette sono sghembe.

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ quindi } \lambda = 1, \mu = 1, \nu = 0, \text{ quindi } \vec{n} = (1, 1, 0).$$

Il generico punto di r è descritto da $P_t = (2+t, -t, 1)$, con non molte difficoltà si scrive una rappresentazione parametrica di s : $\begin{cases} x = -t' \\ y = t' \\ z = -1 + t' \end{cases}$ e quindi il generico punto di s è descritto da $Q_{t'} = (-t', t', -1 + t')$. Ora

consideriamo le componenti del vettore $\overrightarrow{P_t Q_{t'}} = (-2 - t - t', t + t', -2 + t')$ e imponiamo la condizione che le componenti di tale vettore siano proporzionali alla direzione normale $\vec{n} = (1, 1, 0)$; una tale condizione è soddisfatta se la matrice $N = \begin{pmatrix} -2 - t - t' & t + t' & -2 + t' \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1. La condizione è verificata (teorema degli orlati)

$$\text{se } \begin{cases} \begin{vmatrix} -2 - t - t' & t + t' \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -2 - t - t' & -2 + t' \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2t - 2t' - 2 = 0 \\ -t' + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -3 \\ t' = 2 \end{cases} .$$

Il punto cercato della retta r ha coordinate $P = (-1, 3, 1)$. Il punto cercato della retta s ha coordinate $Q = (-2, 2, 1)$.

Questo ci permette di calcolare la distanza tra le due rette: $d(r, s) = d(P, Q) = \sqrt{2}$.

Un'equazione parametrica della retta n è la seguente: $n : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}$, una forma cartesiana è la seguente: $n : \begin{cases} x - y = -4 \\ z = 1 \end{cases}$.

Nelle soluzioni di altre prove è esposto un metodo alternativo a questo.