

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 13 Settembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

Istruzioni: Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo.

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$  si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(x, y, z, t) \mid x + t = 0, y = 0\} \text{ e } W_k = L([(1, k, 0, 0), (0, -1, 1, 1)])$$

- Dire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  è somma diretta di  $U$  e  $W_k$ .
- Determinare una base di  $U \cap W_k$  quando  $\dim(U \cap W_k) > 1$  con  $k \in \mathbb{R}$ .
- Determinare una rappresentazione cartesiana di  $W_0^\perp$  e una base  $T$  di  $W_0 + W_0^\perp$ .
- Determinare i vettori di  $W_0$  che sono ortogonali al vettore  $u = (1, 0, 1, 1)$ .

- Una base di  $U$  la si trova risolvendo il sistema di equazioni lineari che individuate da  $U$  (sistema

lineare omogeneo di 2 equazioni in 4 variabili): 
$$\begin{cases} x + t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -l \\ y = 0 \\ z = m \\ t = l \end{cases} . \text{ Possiamo}$$

scrivere che  $U = \{(-l, 0, m, l) \mid l, m \in \mathbb{R}\}$ , quindi  $\dim U = 2$  e una sua base è costituita dal sistema  $H = [(-1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)]$ . Si osserva facilmente  $W_k$  ha sempre dimensione 2 in quanto la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 2  $\forall k \in \mathbb{R}$ . Una base di  $W_k$  è il sistema  $S_k = [(1, k, 0, 0), (0, -1, 1, 1)]$ .

Non resta che studiare la dimensione dello spazio vettoriale  $U + W_k$  analizzando il rango della matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ applicando Laplace si trova facilmente che } |B_k| = k + 1. \text{ Evidente che}$$

per  $k \neq -1$  si ha  $\dim(U + W_k) = 4$ . Osserviamo che applicando la formula di Grassmann si trova:  $\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim W_k - \dim(U + W_k) = 2 + 2 - 4 = 0$ . Possiamo concludere che per  $k \neq -1$  lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  è somma diretta di  $U$  e  $W_k$ .

- Questo punto poteva creare qualche difficoltà, forse ragionando si risolve facilmente.

Sappiamo che  $\forall k \neq -1 \implies \dim(U \cap W_k) = 0$ , non resta che studiare il caso  $k = -1$ .

Osserviamo che la matrice  $B_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 3 e sempre per la formula di Grassmann

si trova  $\dim(U \cap W_{-1}) = 1$ , in maniera esplicita:  $\dim(U \cap W_k) = \dim U + \dim W_k - \dim(U + W_k) = 2 + 2 - 3 = 1$ .

Quindi al più la dimensione dell'intersezione è 1. La base cercata non esiste in quanto si chiede di determinare una base di  $U \cap W_k$  quando  $\dim(U \cap W_k) > 1$  ovvero  $\dim(U \cap W_k) \geq 2$ . Se qualche studente ha eseguito il calcolo quando  $\dim(U \cap W_k) = 1$  va bene lo stesso e per completezza lo riporto.

Per determinare una base di  $U \cap W_{-1}$  si può scrivere una rappresentazione cartesiana di  $W_{-1}$  e poi risolvere il sistema lineare omogeneo costituito dalle equazioni che caratterizzano  $U$  e  $W_{-1}$ .

Intanto  $W_{-1} = \{(a, -a - b, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ , eliminando i parametri si trova  $W_{-1} = (x, y, z, t)$

$$\{x + y + z = 0, z - t = 0\}. \text{ Ora risolviamo il sistema lineare omogeneo: } \begin{cases} x + t = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}, \text{ si risolve}$$

facilmente  $\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ t = z \end{cases}$  e in definitiva possiamo scrivere che  $U \cap W_k = \{(-l, 0, l, l) \mid l \in \mathbb{R}\}$  e una base è data dal sistema  $B = [(-1, 0, 1, 1)]$ .

(iii) Una rappresentazione cartesiana di  $W_0^\perp$  è la seguente:  $W_0^\perp = \{(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t) \cdot (1, 0, 0, 0) = 0 \text{ e } (x, y, z, t) \cdot (0, -1, 1, 1) = 0\}$ , in forma più compatta  $W_0^\perp = \{(x, y, z, t) \mid x = 0 \text{ e } y - z - t = 0\}$ . Sappiamo che una base di  $W_0 + W_0^\perp$  si ottiene costruendo un sistema di vettori con la base di  $W_0$  e la base di  $W_0^\perp$ .

Per determinare una base di  $W_0^\perp$  risolviamo il sistema lineare omogeneo:  $\begin{cases} x = 0 \\ y - z - t = 0 \end{cases}$ , si trova facilmente che  $W_0^\perp = \{(0, z + t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = L[(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$ , dunque  $S = [(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$  è una base di  $W_0^\perp$ .

La base di  $W_0 + W_0^\perp$  è la seguente:  $T = [(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$ .

(iv) Un generico vettore di  $W_0$  è del seguente tipo:  $w_{a,b} = a(1, 0, 0, 0) + b(0, -1, 1, 1) = (a, -b, b, b)$ , affinché quest'ultimo vettore sia ortogonale al vettore  $u = (1, 0, 1, 1)$  deve valere la relazione  $(a, -b, b, b) \cdot (1, 0, 1, 1) = 0 \iff a + 2b = 0 \iff a = -2b \iff$  i vettori che soddisfano la condizione richiesta sono del tipo  $w_{-2b,b} = -2b(1, 0, 0, 0) + b(0, -1, 1, 1) = (-2b, -b, b, b)$ . In definitiva i vettori che soddisfano la condizione richiesta appartengono al sottospazio vettoriale  $N = L[(2, 1, -1, -1)]$ .

- 2. Sia assegnata la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare se esistono, con  $k \in \mathbb{R}$ , matrici  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  con  $X \neq \mathbf{0}$  tale che  $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(ii) Determinare, se esiste, una matrice  $B$  che verifica la relazione  $A_0 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(i) Dobbiamo determinare le soluzioni non nulle del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dal teorema di Cramer si deduce che tale sistema ammette l'unica soluzione banale  $\iff \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff k - 1 \neq 0 \iff k \neq 1$ . Concludiamo che se  $k \neq 1$  non esiste nessun vettore non nullo  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  che verifica la relazione  $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Le soluzioni  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  con  $X \neq \mathbf{0}$  richieste esistono per  $k = 1$ , in tal caso un generatore dell'insieme delle soluzioni si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ :  $\lambda = 1, \mu = -1, \nu = -1$ . In definitiva tutte le matrici del tipo  $X_\rho = \begin{pmatrix} \rho \\ -\rho \\ -\rho \end{pmatrix}$  e con  $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$  sono le soluzioni del quesito posto.

(ii) La relazione  $A_0 \cdot B = I$  ci riporta alla definizione di inversa di una matrice. La matrice  $B$  esiste  $\iff$  la matrice  $A_0$  ha determinante non nullo.

Il risultato al punto precedente ci dice  $|A_0| = -1$ , dunque  $B = A_0^{-1}$ . Utilizzando uno dei metodi descritti nelle note per determinare l'inversa di una matrice si trova:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **3.** Sia  $\mathbb{R}^3$  lo spazio vettoriale reale canonico con base  $C = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo con le seguenti assegnazioni:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \quad f(0, 1, 0) = (0, 1, 1) \quad f(0, 0, 1) = (-1, 1, 0)$$

- (i) Determinare una base di  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ .
- (ii) Calcolare la controimmagine del vettore  $(0, -1, -1)$ .

(i) Scriviamo la matrice che rappresenta  $f$  nella base assegnata:  $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , le colonne

di questa matrice costituiscono un sistema di generatori di  $\text{Im } f$ . Intanto tale matrice è singolare perchè il suo determinante è nullo (osserva che la terza colonna  $c_3 = c_2 - c_1$ ). Questo vuol dire che le colonne di  $A_f$  sono linearmente dipendenti, le prime due colonne costituiscono un sistema indipendente e concludiamo che una di  $\text{Im } f$  è data dal sistema  $S = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$ . Se il sottospazio vettoriale immagine ha dimensione 2 vuol dire che  $\text{Ker } f$  ha dimensione 1.

Le componenti dei vettori del nucleo si determinano in corrispondenza del sistema: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema risulta essere:  $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ . Un generatore dello spazio delle soluzioni è il vettore  $u = (1, -1, 1)$ . Possiamo concludere che una base di  $\text{Ker } f$  è data dal sistema  $T = [(1, -1, 1)]$

(ii) Per determinare la controimmagine del vettore  $(0, -1, -1)$  dobbiamo determinare i vettori  $v$  di  $\mathbb{R}^3$  le cui immagini  $f(v)$  coincidono una con  $(0, -1, -1)$ . Anche in questo caso la matrice  $A_f$  ci viene in aiuto. Conosciamo

benissimo il ruolo che riveste  $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , ovvero  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Concludiamo che dobbiamo risolvere il sistema:  $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ , le soluzioni del sistema si trovano facilmente e

sono  $S = \{(h, -h - 1, h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ . La controimmagine di  $(0, -1, -1)$  sarà costituita dai vettori di  $\mathbb{R}^3$  del tipo  $v = (h, -h - 1, h)$  con  $h \in \mathbb{R}$ .

- **4.** Assegnato il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (2x + z, -x + y - z, z)$$

- (i) Determinare la matrice  $A_f$  rispetto al riferimento  $\Sigma = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ .
- (ii) Studiare la diagonalizzabilità di  $f$  e determinare, nel caso sia diagonalizzabile, una base  $B$  di autovettori e una matrice  $P$  che diagonalizza  $A_f$ .

(i) Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:

$$f(0, 1, 0) = (0, 1, 0);$$

$$f(1, 0, 0) = (2, -1, 0);$$

$$f(0, 0, 1) = (1, -1, 1);$$

La base canonica si ottiene effettuando una permutazione sui vettori assegnati, le componenti seguono la stessa regola:  $2 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 3$ .

La matrice  $A_f$  si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e il punto (i) è risolto.}$$

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo  $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$ , si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)(2 - \lambda)]$$

Le radici del polinomio caratteristico sono:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 2$ .

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

Utilizzando la matrice  $A_f - \lambda I = A_f - I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , si ha:

$$A_f - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{y + z = 0\}. \text{ L'autospazio } V_1 = \{(x, -z, z) \text{ con } x, z \in \mathbb{R}\} \text{ e una sua}$$

base è costituita dai vettori:  $u_1 = (1, 0, 0)$  e  $u_2 = (0, -1, 1)$ , quindi  $V_1 = L[(1, 0, 0), (0, -1, 1)]$ .

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $\lambda_3 = 2$ . Utilizzando la matrice  $A_f - 2I$ , scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$$A_f - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \text{ L'autospazio } V_2 = \{(-y, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$

una sua base è costituita dal vettore:  $u_3 = (-1, 1, 0)$ , quindi  $V_2 = L[(-1, 1, 0)]$ .

La matrice che diagonalizza la  $A_f$  è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $P$  si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$$P^{-1}A_fP = D \text{ dove } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ infatti si ha:}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### **Remark 1** OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Gli elementi degli insiemi  $V_\lambda$  che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Vedere quanto detto nelle note del sito a riguardo o nelle soluzioni di prove assegnate in precedenza.

Una base di autovettori è la seguente:  $T = [(0, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, -1, 0)]$ .

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 2, 1) \quad r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \alpha : x + y - 2z = 1$$

- Determinare la retta  $l$  per  $P$  ortogonale a  $r$  e complanare con  $s$ .
- Determinare la retta  $m$  per  $P$  parallela al piano  $\alpha$  e ortogonale alla retta  $s$ .
- Determinare una rappresentazione cartesiana della retta  $t$  per  $P$  ortogonale a  $\alpha$ .
- Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe, determinare la retta normale e incidente  $r$  e  $s$ . Calcolare  $d(r, s)$ .

(i) La retta  $r$  ha direzione individuata dal vettore  $\vec{r} = (-1, 0, 1)$ , la direzione di  $s$  si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  e quindi  $\vec{s} = (-1, -1, 1)$ , le componenti di un vettore ortogonale al piano  $\alpha$  sono date da  $\vec{\alpha} = (1, 1, -2)$ .

Tali elementi sono stati calcolati perchè utili nel prosieguo.

La retta  $l$  cercata si trova nel piano  $\gamma_1$  per  $P$  e perpendicolare a  $r$  e nel piano  $\gamma_2$  per  $P$  contenente  $s$ , dunque  $l = \gamma_1 \cap \gamma_2$ .

Determiniamo il piano  $\gamma_1 : -1(x+1) + 0(y-2) + 1(z-1) = 0 \iff -x+z-2 = 0 \iff \gamma_1 : x-z = -2$ .

Determiniamo il piano  $\gamma_2 : \lambda(x+z-1) + \mu(y+z) = 0 \iff -\lambda + 3\mu = 0 \iff \lambda = 3\mu$ , ponendo  $\mu = 1$  e  $\lambda = 3$  si ottiene  $\gamma_2 : 3x + y + 4z = 3$ .

In definitiva la retta  $l$  ha equazione:  $l : \begin{cases} x - z = -2 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ .

(ii) La retta  $m$  cercata si trova nel piano  $\rho_1$  per  $P$  e parallelo a  $\alpha$  e nel piano  $\rho_2$  per  $P$  perpendicolare a  $s$ , dunque  $m = \rho_1 \cap \rho_2$ .

Determiniamo il piano  $\rho_1 : (x+1) + (y-2) - 2(z-1) = 0 \iff \rho_1 : x + y - 2z = -1$ .

Determiniamo il piano  $\rho_2 : -1(x+1) - 1(y-2) + 1(z-1) = 0 \iff -x - y + z = 0 \iff \rho_2 : x + y - z = 0$ .

In definitiva la retta ha equazione:  $m : \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ .

(iii) Bisogna determinare la retta per  $P$  avente la direzione  $\vec{\alpha} = (1, 1, -2)$ , si ottiene la rappresentazione parametrica:  $t : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$  e quindi una rappresentazione cartesiana  $t : \begin{cases} x - y = -3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ .

(iv) I parametri direttori di  $r$  sono  $\vec{r} = (-1, 0, 1)$  e i parametri direttori di  $s$  sono  $\vec{s} = (-1, -1, 1)$ , dunque le rette non sono parallele. Si vede facilmente che le equazioni che definiscono  $r$  e  $s$  sono incompatibili, possiamo concludere che le rette sono sghembe.

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a  $r$  e  $s$  considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ quindi } \lambda = 1, \mu = 0, \nu = 1, \text{ quindi } \vec{n} = (1, 0, 1).$$

Il generico punto di  $r$  è descritto da  $P_t = (2-t, -1, t)$ , con non molte difficoltà si scrive una rappresentazione parametrica di  $s$  :  $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -t' \\ z = t' \end{cases}$  e quindi il generico punto di  $s$  è descritto da  $Q_{t'} = (1-t', -t', t')$ . Ora consideriamo

le componenti del vettore  $\overrightarrow{P_t Q_{t'}} = (-1 + t - t', 1 - t', -t + t')$  e imponiamo la condizione che le componenti di tale vettore siano proporzionali alla direzione normale  $\vec{n} = (1, 0, 1)$ ; una tale condizione è soddisfatta se la matrice  $N = \begin{pmatrix} -1 + t - t' & 1 - t' & -t + t' \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 1. La condizione è verificata (teorema degli orlati) se

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} -1 + t - t' & 1 - t' \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 + t - t' & -t + t' \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t' - 1 = 0 \\ 2t - 2t' - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t' = 1 \end{cases} .$$

Il punto cercato della retta  $r$  ha coordinate  $P = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$ . Il punto cercato della retta  $s$  ha coordinate  $Q = (0, -1, 1)$ .

Questo ci permette di calcolare la distanza tra le due rette:  $d(r, s) = d(P, Q) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Un'equazione parametrica della retta  $n$  è la seguente:  $n : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ , una forma cartesiana è la seguente:

$$n : \begin{cases} y = -1 \\ x - z = -1 \end{cases} .$$

Nelle soluzioni di altre prove è esposto un metodo alternativo a questo.