Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 13 Settembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________

Istruzioni: *Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo.*

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(x,y,z,t) \mid x = 0,\ y + z = 0\} \text{ e } W_k = L\left([(0,k,1,0),(1,-1,0,1)]\right)$$

(i) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W_k.
(ii) Determinare una base di $U \cap W_k$ quando $\dim(U \cap W_k) > 1$ con $k \in \mathbb{R}$.
(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana di $W_0^{\perp}$ e una base T di $W_0 + W_0^{\perp}$.
(iv) Determinare i vettori di W_0 che sono ortogonali al vettore $u = (-1,1,1,0)$.

- **2**. Sia assegnata la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare se esistono, con $k \in \mathbb{R}$, matrici $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X \neq \mathbf{0}$ tale che $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(ii) Determinare, se esiste, una matrice B che verifica la relazione $A_0 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **3**. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale reale canonico con base $C = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con le seguenti assegnazioni:

$$f(1,0,0) = (1,0,1) \qquad f(0,1,0) = (-1,1,0) \qquad f(0,0,1) = (0,1,1)$$

(i) Determinare una base di $K\mathrm{er} f$ e $\mathrm{Im}\, f$.
(ii) Calcolare la controimmagine del vettore $(-1,1,0)$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (-x, -3x - y - 3z, 3x + 2z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $\Sigma = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f e determinare, nel caso sia diagonalizzabile, una base B di autovettori e una matrice P che diagonalizza A_f.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,1,2) \qquad r : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad \alpha : x + 2y - z = -1$$

(i) Determinare la retta l per P ortogonale a r e complanare con s.
(ii) Determinare la retta m per P parallela al piano α e ortogonale alla retta s.
(iii) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t per P ortogonale a α.
(iv) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r,s)$.