

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 13 Settembre 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

Istruzioni: Non saranno presi in considerazione gli esercizi che non evidenziano il procedimento risolutivo.

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(x, y, z, t) \mid x + t = 0, y = 0\} \text{ e } W_k = L([(1, k, 0, 0), (0, -1, 1, 1)])$$

- (i) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 è somma diretta di U e W_k .
- (ii) Determinare una base di $U \cap W_k$ quando $\dim(U \cap W_k) > 1$ con $k \in \mathbb{R}$.
- (iii) Determinare una rappresentazione cartesiana di W_0^\perp e una base T di $W_0 + W_0^\perp$.
- (iv) Determinare i vettori di W_0 che sono ortogonali al vettore $u = (1, 0, 1, 1)$.

- 2. Sia assegnata la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare se esistono, con $k \in \mathbb{R}$, matrici $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $X \neq \mathbf{0}$ tale che $A_k X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (ii) Determinare, se esiste, una matrice B che verifica la relazione $A_0 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 3. Sia \mathbb{R}^3 lo spazio vettoriale reale canonico con base $C = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con le seguenti assegnazioni:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \quad f(0, 1, 0) = (0, 1, 1) \quad f(0, 0, 1) = (-1, 1, 0)$$

- (i) Determinare una base di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
- (ii) Calcolare la controimmagine del vettore $(0, -1, -1)$.

- 4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (2x + z, -x + y - z, z)$$

- (i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $\Sigma = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$.
- (ii) Studiare la diagonalizzabilità di f e determinare, nel caso sia diagonalizzabile, una base B di autovettori e una matrice P che diagonalizza A_f .

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 2, 1) \quad r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \alpha : x + y - 2z = 1$$

- (i) Determinare la retta l per P ortogonale a r e complanare con s .
- (ii) Determinare la retta m per P parallela al piano α e ortogonale alla retta s .
- (iii) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta t per P ortogonale a α .
- (iv) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s . Calcolare $d(r, s)$.