Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 12 Luglio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_\lambda = [(\lambda - 3, 1, 0), (-\lambda - 1, 0, 1), (\lambda, 1, -1)]$$

$$K = \{(x, y, z) \mid \;\; x - y + z = 0\}$$

$$W_t = [(-3t, 1, -2 + 3t)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema S_λ è legato e per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(S_\lambda)$.

(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(S_\lambda) \cap K$ quando il sistema S_λ è legato.

(iii) Determinare la dimensione di $L(W_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta $L(W_t)^\perp = K$? Giustificare tutte le risposte.

(i) Per studiare la dipendenza lineare del sistema S_λ consideriamo la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ -\lambda - 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$, applicando la regola di Sarrus si osserva che $|M_\lambda| = -\lambda + 2$.

Possiamo concludere che il sistema S_λ è legato $\iff -\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 2$. Possiamo scrivere $S_2 = [(-1, 1, 0), (-3, 0, 1), (2, 1, -1)]$, un tale sistema è linearmente dipendente, nel costruire il sottospazio vettoriale generato dal sistema S_2 possiamo considerare due qualsiasi vettori di esso. Il sistema $T = [(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)]$ è una base del sottospazio vettoriale $L(S_2)$.

$L(S_2) = L\,[(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)] = \{h(-1, 1, 0) + k(-3, 0, 1) |\; h, k \in \mathbb{R}\} = \{(-h - 3k, h, k) \mid h, k \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid x = -h - 3k, y = h, z = k, \text{ con } h, k \in \mathbb{R}\}$

Liberando le relazioni dai parametri si trova: $L(S_2) = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 0\}$.

(ii) Avendo a disposizione le rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi vettoriali si trova: $L(S_2) \cap K = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 0 \text{ e } \; x - y + z = 0\}$. Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. La matrice del sistema lineare è la seguente: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\rho(M) = 2$ perchè le due righe non sono proporzionali.

Una base del sottospazio vettoriale si trova facilmente considerando il determinate dei minori a segno alterno estratti da M: $u = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4, 2, -2)$, dunque una base di $L(S_2) \cap K$ è data dal vettore $v = (2, 1, -1)$.

(iii) Il sistema $W_t = [(-3t, 1, -2 + 3t)]$ è costituito da un unico vettore non nullo $\forall t \in \mathbb{R}$. Concludiamo che la $\dim L(W_t) = 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$ e il vettore $w_t = (-3t, 1, -2 + 3t)$ è una sua base.

Osserviamo che $L(W_t)^\perp = K \iff \left(L(W_t)^\perp\right)^\perp = K^\perp \iff L(W_t) = K^\perp$. Dalla rappresentazione cartesiana di K si trova che $K^\perp = L[(1, -1, 1)]$.

Evidentemente $L(W_t) = K^\perp \iff L\,[(-3t, 1, -2 + 3t)] = L[(1, -1, 1)] \iff$ i vettori che generano tali sottospazi vettoriali sono proporzionali $\iff$ la seguente matrice: $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3t & 1 & -2 + 3t \end{pmatrix}$ ha rango 1. Applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $H_1^1 = (1)$ si trova: $\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3t & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3t & -2 + 3t \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} 1-3t=0 \\ 6t-2=0 \end{cases} \iff t=\frac{1}{3}.$$

Concludiamo che $L(W_t)^{\perp}=K \iff t=\dfrac{1}{3}$ e in tal caso $L(W_{\frac{1}{3}})=[(-1,1,-1)] \sim [(1,-1,1)]$

Per risolvere l'ultimo punto si può ragionare anche nel seguente modo: $K=\{(x,y,z) \mid \ x-y+z=0\}=\{(y-z,y,z)$ con $y,z\in\mathbb{R}\}=L[(1,1,0),(-1,0,1)]$, osserviamo che $L(W_t)^{\perp}=K \iff (1,1,0)\cdot(-3t,1,-2+3t)=0$ e $(-1,0,1)\cdot(-3t,1,-2+3t)=0 \iff -3t+1=0$ e $3t-2+3t=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$ e in tal caso $L(W_{\frac{1}{3}})=[(-1,1,-1)]\sim[(1,-1,1)]$ e $K=L[(1,1,0),(-1,0,1)]$, dunque la base di K è ortogonale alla base di $L(W_{\frac{1}{3}})$.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x,y,z e t:

$$\begin{cases} 2x+y-z-kt=0 \\ -kx+y-t=0 \\ 2x-y-t=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k\in\mathbb{R}$.

Scriviamo la matrice del sistema: $M_k=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -k \\ -k & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, applichiamo la regola di Laplace alla terza colonna e successivamente la regola di Sarrus, si trova: $|M_k|=-1\begin{vmatrix} -k & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-2k-2.$

Ora $|M_k|\neq 0 \iff -2k-2\neq 0 \iff k\neq -1$ e in tal caso il sistema lineare ammetterà la soluzione banale $\mathbf{0}=(0,0,0,0)$, possiamo scrivere $S_k=\{(0,0,0,0)\}$ con $k\neq -1$.

Se $k=-1$ la matrice diventa $M_{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tale matrice ha rango 3 in quanto la sottomatrice $H^{1,2,3}_{1,2,3}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinate non nullo, in tal caso il sistema lineare ammette $\infty^{4-3}=\infty^1$ soluzioni. Il generatore dello spazio delle soluzioni è il seguente (ricordiamo che trattasi di un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili e il rango della matrice è 3):

$$S_{-1}=L\left[\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right)\right]=$$

$L\left[(-2,-1,-8,-3)\right]$. In sintesi $S_{-1}=\{(2\lambda,\lambda,8\lambda,3\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $v=(0,1,-1)$ è un autovettore di autovalore $\lambda=-1$ e avente $\dim Kerf=1$.

La nostra applicazione lineare deve verificare la condizione $f(0,1,-1)=-1(0,1,-1)=(0,-1,1)$.

Ora dobbiamo estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$ il sistema $S=[(0,1,-1)]$, noi prenderemo l'estensione: $C=[(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,0)]$. Teniamo conto che $\dim Kerf=1$ e conseguentemente $\dim \mathrm{Im} f=2$.

Poniamo $f(1,0,0) = (0,0,0)$ e $f(0,1,0) = (1,0,0)$ (un vettore immagine arbitrario purchè non proporzionale all'immagine dell'autovettore per garantirsi $\dim \operatorname{Im} f = 2$).

Riepiloghiamo le immagini sui vettori della base:
$f(0,1,-1) = (0,-1,1)$
$f(1,0,0) = (0,0,0)$
$f(0,1,0) = (1,0,0)$
Ora $(x,y,z) = \alpha(0,1,-1) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,0) \iff (x,y,z) = (\beta, \alpha+\gamma, -\alpha) \iff$
$\begin{cases} \beta = x \\ \alpha+\gamma = y \\ -\alpha = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -z \\ \beta = x \\ \gamma = y+z \end{cases}$.

Possiamo scrivere $f(x,y,z) = f\left[\alpha(0,1,-1) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,0)\right] = f\left[-z(0,1,-1) + x(1,0,0) + (y+z)(0,1,0)\right] =$
$= -zf(0,1,-1) + xf(1,0,0) + (y+z)f(0,1,0) = -z(0,-1,1) + x(0,0,0) + (y+z)(1,0,0) =$
$(y+z, z, -z)$.

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x,y,z) = (y+z, z, -z)$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_f rispetto al riferimento canonico.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(i) Se A_f è la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica, la legge che definisce f ottiene moltiplicando la matrice A_f con il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dunque $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $(2x, 3x+2y+3z, -3x-z)$, in forma più compatta $f(x,y,z) = (2x, 3x+2y+3z, -3x-z)$.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:
Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) \\ p(\lambda) &= (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.
Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, si ha:
$A_f - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ tale matrice "restituisce" il sistema lineare $\{x + z = 0$

$V_2 = \{(-z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (-1, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 0)$, quindi $V_1 = L[(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$. A questo punto già possiamo concludere che l'endomorfismo è diagonalizzabile, l'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ è regolare e l'altro autovalore $\lambda_1 = -1$ essendo una radice semplice è sicuramente regolare.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = -1$.
Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = -1$, si ha:

$$A_f + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$

$V_{-1} = \{(0, -z, z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (0, -1, 1)$, quindi $V_{-1} = L[(0, -1, 1)]$.
La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio. Vi ricordo che la matrice P non è univocamente determinata, dipende da quali vettori abbiamo scelto nei relativi autospazi.

In ogni caso la matrice P verifica la seguente relazione: $P^{-1} A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Una base di autovettori è la seguente: $T = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, -1, 1)]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 0, -1) \qquad Q \equiv (0, -1, 0) \qquad R \equiv (1, -1, -1)$$

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \pi : x + y + 2z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare il piano α che contiene s e perpendicolare a π.
(ii) Determinare la retta l per P complanare con s e parallela a π.
(iii) Calcolare la distanza del punto R dalla retta s.
(iv) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e calcolare il piano β che li contiene.
(v) Determinare il piano γ per Q e parallelo a r e s.

(i) I parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (1, 0, 1)$, la terna $\overrightarrow{n} = (1, 1, 2)$ rappresenta le componenti di un vettore ortogonale al piano π e $T \equiv (1, 1, 1)$ è un punto di s, il piano α deve soddisfare la seguente condizione:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha : x + y - z = 1$$

(ii) La retta cercata per essere complanare con s deve giacere in un piano che contiene s e passante per $P \equiv (-1, 0, -1)$; per essere parallela a π deve essere contenuta in un piano per P e parallelo a π. In definitiva la retta cercata è l'intesezione dei due piani elencati in precedenza. Ora determineremo l'equazione di questi due piani e in maniera preliminare determiniamo un'equazione cartesiana di s : $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Fascio di piani per s e passante per P : $\lambda(x-z)+\mu(y-1)=0 \Longrightarrow 0\lambda-\mu=0 \Longrightarrow$ poniamo $\lambda=1$ e $\mu=0$. Sostituendo tali valori nel fascio si ottiene il piano: $\alpha_1 : x-z=0$.

Per il piano parallelo a π scriviamo $x+y+2z=d$, imponiamo il passaggio per $P \equiv (-1,0,-1)$ e otteniamo $d=-3$, quindi $\alpha_2 : x+y+2z=-3$. Un'equazione della retta l è la seguente:

$$l : \begin{cases} x-z=0 \\ x+y+2z=-3 \end{cases} .$$

(iii) Determiniamo il piano per R e perpendicolare a $s : x+z=d$ (i coefficienti di x, y e z sono dati dalla terna $\overrightarrow{s}=(1,0,1)$) imponiamo il passaggio per $R \equiv (1,-1,-1)$ e otteniamo $d=0$, quindi $\delta : x+z=0$. Intersechiamo tale piano con la retta $s : \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1+t \\ x+z=0 \end{cases}$ e otteniamo la relazione $2t+2=0 \Longrightarrow t=-1$, il punto di intersezione avrà coordinate $D=(0,1,0)$ e la distanza del punto R dalla retta s è data dalla lunghezza del segmento $\overrightarrow{RD}$:

$$d(R,s)=\left|\overrightarrow{RD}\right|=\sqrt{(1-0)^2+(-1-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{6}.$$

(iv) Determiniamo le componenti dei vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$: $\overrightarrow{PQ}=(1,-1,1)$, $\overrightarrow{PR}=(2,-1,0)$, la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 e quindi i tre punti non sono allineati. Il piano che li contiene deve soddisfare la seguente condizione (piano per uno qualsiasi dei tre punti e con giacitura data dai vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$):

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta \quad : \quad x+2y+z=-2$$

(v) Intanto determiniamo la direzione di r sviluppando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda=1$, $\mu=1$, $\nu=1$, quindi $\overrightarrow{r}=(1,1,1)$. Il piano cercato, dovendo contenere la direzione di r e s e il punto $Q \equiv (0,-1,0)$,deve soddisfare la seguente condizione:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\gamma \quad : \quad x-z=0$$