Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 12 Luglio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_\lambda = [(-\lambda-1,1,0),(-1,0,2-\lambda),(\lambda,-1,1)]$$

$$K = \{(x,y,z) \mid \ x+y-z=0\}$$

$$W_t = [(2t,-1,2t+2)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema S_λ è legato e per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(S_\lambda)$.

(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(S_\lambda) \cap K$ quando il sistema S_λ è legato.

(iii) Determinare la dimensione di $L(W_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta $L(W_t)^\perp = K$? Giustificare tutte le risposte.

(i) Per studiare la dipendenza lineare del sistema S_λ consideriamo la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda-1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$, applicando la regola di Sarrus si osserva che $|M_\lambda| = \lambda - 1$.

Possiamo concludere che il sistema S_λ è legato $\iff \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = 1$. Possiamo scrivere $S_1 = [(-2,1,0),(-1,0,1),(1,-1,1)]$, un tale sistema è linearmente dipendente, nel costruire il sottospazio vettoriale generato dal sistema S_1 possiamo considerare due qualsiasi vettori di esso. Il sistema $T = [(-1,0,1),(1,-1,1)]$ è una base del sottospazio vettoriale $L(S_1)$.

$L(S_1) = L\,[(-1,0,1),(1,-1,1)] = \{h(-1,0,1)+k(1,-1,1) |\ h,k \in \mathbb{R}\} = \{(-h+k,-k,h+k) \mid h,k \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \mid x=-h+k, y=-k, z=h+k, \text{con } h,k \in \mathbb{R}\}$

Liberando le relazioni dai parametri si trova: $L(S_1) = \{(x,y,z) \mid x+2y+z=0\}$.

(ii) Avendo a disposizione le rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi vettoriali si trova: $L(S_1) \cap K = \{(x,y,z) \mid x+2y+z=0 \text{ e } \ x+y-z=0\}$. Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$. La matrice del sistema lineare è la seguente: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\rho(M) = 2$ perchè le due righe non sono proporzionali.

Una base del sottospazio vettoriale si trova facilmente considerando il determinate dei minori a segno alterno estratti da M: $u = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3,2,-1)$, dunque una base di $L(S_1) \cap K$ è data dal vettore $v = (-3,2,-1)$.

(iii) Il sistema $W_t = [(2t,-1,2t+2)]$ è costituito da un unico vettore non nullo $\forall t \in \mathbb{R}$. Concludiamo che la $\dim L(W_t) = 1\ \forall t \in \mathbb{R}$ e il vettore $w_t = (2t,-1,2t+2)$ è una sua base.

Osserviamo che $L(W_t)^\perp = K \iff \left(L(W_t)^\perp\right)^\perp = K^\perp \iff L(W_t) = K^\perp$. Dalla rappresentazione cartesiana di K si trova che $K^\perp = L[(1,1,-1)]$.

Evidentemente $L(W_t) = K^\perp \iff L\,[(2t,-1,2t+2)] = L[(1,1,-1)] \iff$ i vettori che generano tali sottospazi vettoriali sono proporzionali $\iff$ la seguente matrice: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2t & -1 & 2t+2 \end{pmatrix}$ ha rango 1. Applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $H_1^1 = (1)$ si trova: $\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2t & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2t & 2t+2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} -1-2t=0 \\ 2t+2+2t=0 \end{cases} \iff t=-\dfrac{1}{2}.$

Concludiamo che $L(W_t)^{\perp}=K \iff t=-\dfrac{1}{2}$ e in tal caso $L(W_{-\frac{1}{2}})=[(-1,-1,1)]\sim[(1,1,-1)]$.

Per risolvere l'ultimo punto si può ragionare anche nel seguente modo: $K=\{(x,y,z)\mid\ x+y-z=0\}=\{(-y+z,y,z)$ con $y,z\in\mathbb{R}\}=L[(-1,1,0),(1,0,1)]$, osserviamo che $L(W_t)^{\perp}=K \iff (-1,1,0)\cdot(2t,-1,2t+2)=0$ e $(1,0,1)\cdot(2t,-1,2t+2)=0 \iff -2t-1=0$ e $2t+2t+2=0 \iff t=-\dfrac{1}{2}$ e in tal caso $L(W_{-\frac{1}{2}})=[(-1,-1,1)]\sim[(1,1,-1)]$ e $K=L[(-1,1,0),(1,0,1)]$, dunque la base di K è ortogonale alla base di $L(W_{-\frac{1}{2}})$.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x,y,z e t:

$$\begin{cases} 2x-y+z+kt=0 \\ kx-z+t=0 \\ 2x-z-t=0 \\ x-2t=0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k\in\mathbb{R}$.

Scriviamo la matrice del sistema: $M_k=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & k \\ k & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, applichiamo la regola di Laplace alla seconda colonna e successivamente la regola di Sarrus, si trova: $|M_k|=\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=2k-2.$

Ora $|M_k|\neq 0 \iff 2k-2\neq 0 \iff k\neq 1$ e in tal caso il sistema lineare ammetterà la soluzione banale $\mathbf{0}=(0,0,0,0)$, possiamo scrivere $S_k=\{(0,0,0,0)\}$ con $k\neq 1$.

Se $k=1$ la matrice diventa $M_1=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, tale matrice ha rango 3 in quanto la sottomatrice $H^{2,3,4}_{1,2,3}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinate non nullo, in tal caso il sistema lineare ammette $\infty^{4-3}=\infty^1$ soluzioni. Il generatore dello spazio delle soluzioni è il seguente (ricordiamo che trattasi di un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili e il rango della matrice è 3):

$$S_1=L\left[\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right)\right]=$$

$L\left[(-2,-8,-3,-1)\right]$. In sintesi $S_1=\{(2\lambda,8\lambda,3\lambda,\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $v=(1,0,-1)$ è un autovettore di autovalore $\lambda=-1$ e avente $\dim\operatorname{Im}f=2$.

La nostra applicazione lineare deve verificare la condizione $f(1,0,-1)=-1(1,0,-1)=(-1,0,1)$.

Ora dobbiamo estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$ il sistema $S=[(1,0,-1)]$, noi prenderemo l'estensione: $C=[(1,0,-1),(0,1,0),(0,0,1)]$. Teniamo conto che $\dim\operatorname{Im}f=2$ e conseguentemente $\dim K\text{erf}=1$.

Poniamo $f(0,1,0)=(0,0,0)$ e $f(0,0,1)=(1,0,1)$ (un vettore immagine arbitrario purchè non proporzionale all'immagine dell'autovettore per garantirsi $\dim\operatorname{Im}f=2$).

Riepiloghiamo le immagini sui vettori della base:
$f(1,0,-1) = (-1,0,1)$
$f(0,1,0) = (0,0,0)$
$f(0,0,1) = (1,0,1)$
Ora $(x,y,z) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \iff (x,y,z) = (\alpha,\beta,\alpha+\gamma) \iff$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ -\alpha+\gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ \gamma = x+z \end{cases}$$

Possiamo scrivere $f(x,y,z) = f\left[\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)\right] = f\left[x(1,0,-1)+y(0,1,0)+(x+z)(0,0,1)\right] =$
$= xf(1,0,-1)+yf(0,1,0)+(x+z)f(0,0,1) = x(-1,0,1)+y(0,0,0)+(x+z)(1,0,1) = (z,0,2x+z)$.

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x,y,z) = (z,0,2x+z)$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_f rispetto al riferimento canonico.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(i) Se A_f è la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica, la legge che definisce f ottiene moltiplicando la matrice A_f con il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dunque $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $(-x-2y-2z, y+2z, -z)$, in forma più compatta $f(x,y,z) = (-x-2y-2z, y+2z, -z)$.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:
Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) \\ p(\lambda) &= (-1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.
Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, si ha:
$A_f + I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ tale matrice "restituisce" il sistema lineare $\{y+z=0$
$V_{-1} = \{(x,-z,z)$ con $x,z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,-1,1)$, quindi $V_{-1} = L\left[(1,0,0),(0,-1,1)\right]$. A questo punto già possiamo concludere che l'endomorfismo è diagonalizzabile, l'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ è regolare e l'altro autovalore $\lambda_1 = 1$ essendo una radice semplice è sicuramente regolare.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 1$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = 1$, si ha:
$$A_f - I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$

$V_1 = \{(-y, y, 0) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (-1, 1, 0)$, quindi $V_1 = L\left[(-1, 1, 0)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio. Vi ricordo che la matrice P non è univocamente determinata, dipende da quali vettori abbiamo scelto nei relativi autospazi.

In ogni caso la matrice P verifica la seguente relazione: $P^{-1}A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Una base di autovettori è la seguente: $T = \left[(1, 0, 0), (0, -1, 1), (-1, 1, 0)\right]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, 1) \qquad Q \equiv (0, -1, 0) \qquad R \equiv (-1, -1, 1)$$
$$r : \begin{cases} x - y = -1 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases} \qquad \pi : x - 2y + z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare il piano α che contiene s e perpendicolare a π.
(ii) Determinare la retta l per P complanare con s e parallela a π.
(iii) Calcolare la distanza del punto R dalla retta s.
(iv) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e calcolare il piano β che li contiene.
(v) Determinare il piano γ per Q e parallelo a r e s.

(i) I parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (1, 1, 0)$, la terna $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$ rappresenta le componenti di un vettore ortogonale al piano π e $T \equiv (-1, 1, -1)$ è un punto di s, il piano α deve soddisfare la seguente condizione:
$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\alpha : x - y - 3z = 1$$

(ii) La retta cercata per essere complanare con s deve giacere in un piano che contiene s e passante per $P \equiv (1, 0, 1)$; per essere parallela a π deve essere contenuta in un piano per P e parallelo a π. In definitiva la retta cercata è l'intesezione dei due piani elencati in precedenza. Ora determineremo l'equazione di questi due piani e in maniera preliminare determiniamo un'equazione cartesiana di s : $\begin{cases} x - y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$.

Fascio di piani per s e passante per $P : \lambda(x - y + 2) + \mu(z + 1) = 0 \Longrightarrow 3\lambda + 2\mu = 0 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}\mu$, poniamo $\mu = -3$ e $\lambda = 2$. Sostituendo tali valori nel fascio si ottiene il piano: $\alpha_1 : 2x - 2y - 3z = -1$.

Per il piano parallelo a π scriviamo $x - 2y + z = d$, imponiamo il passaggio per $P \equiv (1, 0, 1)$ e otteniamo $d = 2$, quindi $\alpha_2 : x - 2y + z = 2$. Un'equazione della retta l è la seguente:

$$l : \begin{cases} 2x - 2y - 3z = -1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases} .$$

(iii) Determiniamo il piano per R e perpendicolare a $s : x + y = d$ (i coefficienti di x, y e z sono dati dalla terna $\overrightarrow{s} = (1, 1, 0)$) imponiamo il passaggio per $R \equiv (-1, -1, 1)$ e otteniamo $d = -2$, quindi $\delta : x + y = -2$. Intersechiamo tale piano con la retta $s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$ e otteniamo la relazione $2t = -2 \Longrightarrow t = -1$, il punto di intersezione avrà coordinate $D = (-2, 0, -1)$ e la distanza del punto R dalla retta s è data dalla lunghezza del segmento $\overrightarrow{RD}$:

$$d(R, s) = \left|\overrightarrow{RD}\right| = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 0)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{6}.$$

(iv) Determiniamo le componenti dei vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$: $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{PR} = (2, 1, 0)$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 e quindi i tre punti non sono allineati. Il piano che li contiene deve soddisfare la seguente condizione (piano per uno qualsiasi dei tre punti e con giacitura data dai vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$):

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta \quad : \quad x - 2y + z = 2$$

(v) Intanto determiniamo la direzione di r sviluppando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$, quindi $\overrightarrow{r} = (-1, -1, 1)$. Il piano cercato, dovendo contenere la direzione di r e s e il punto $Q \equiv (0, -1, 0)$, deve soddisfare la seguente condizione:

$$\begin{vmatrix} x & y + 1 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\gamma \quad : \quad x - y = 1$$