Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 12 Luglio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome____________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_\lambda = [(1, -\lambda + 1, 0), (0, \lambda, 1), (1, -\lambda, 1)]$$

$$K = \{(x, y, z) \mid \ \ x + y + z = 0\}$$

$$W_t = [(-1, -2t, -2 + 2t)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema S_λ è legato e per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(S_\lambda)$.

(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(S_\lambda) \cap K$ quando il sistema S_λ è legato.

(iii) Determinare la dimensione di $L(W_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta $L(W_t)^\perp = K$? Giustificare tutte le risposte.

(i) Per studiare la dipendenza lineare del sistema S_λ consideriamo la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$, applicando la regola di Sarrus si osserva che $|M_\lambda| = \lambda + 1$.

Possiamo concludere che il sistema S_λ è legato $\iff \lambda + 1 = 0 \iff \lambda = -1$. Possiamo scrivere $S_{-1} = [(1, 2, 0), (0, -1, 1), (1, 1, 1)]$, un tale sistema è linearmente dipendente, nel costruire il sottospazio vettoriale generato dal sistema S_{-1} possiamo considerare due qualsiasi vettori di esso. Il sistema $T = [(0, -1, 1), (1, 1, 1)]$ è una base del sottospazio vettoriale $L(S_{-1})$.

$L(S_{-1}) = L[(0, -1, 1), (1, 1, 1)] = \{h(0, -1, 1) + k(1, 1, 1) | \ h, k \in \mathbb{R}\} = \{(k, -h + k, h + k) \mid h, k \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid x = k, y = -h + k, z = h + k, \text{ con } h, k \in \mathbb{R}\}$

Liberando le relazioni dai parametri si trova: $L(S_{-1}) = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$.

(ii) Avendo a disposizione le rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi vettoriali si trova: $L(S_{-1}) \cap K = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0 \text{ e } \ x + y + z = 0\}$. Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. La matrice del sistema lineare è la seguente: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\rho(M) = 2$ perchè le due righe non sono proporzionali.

Una base del sottospazio vettoriale si trova facilmente considerando il determinate dei minori a segno alterno estratti da M: $u = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, -3, 3)$, dunque una base di $L(S_{-1}) \cap K$ è data dal vettore $v = (0, 1, -1)$.

(iii) Il sistema $W_t = [(-1, -2t, -2 + 2t)]$ è costituito da un unico vettore non nullo $\forall t \in \mathbb{R}$. Concludiamo che la $\dim L(W_t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$ e il vettore $w_t = (-1, -2t, -2 + 2t)$ è una sua base.

Osserviamo che $L(W_t)^\perp = K \iff \left(L(W_t)^\perp\right)^\perp = K^\perp \iff L(W_t) = K^\perp$. Dalla rappresentazione cartesiana di K si trova che $K^\perp = L[(1, 1, 1)]$.

Evidentemente $L(W_t) = K^\perp \iff L[(-1, -2t, -2 + 2t)] = L[(1, 1, 1)] \iff$ i vettori che generano tali sottospazi vettoriali sono proporzionali $\iff$ la seguente matrice: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2t & -2 + 2t \end{pmatrix}$ ha rango

1. Applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $H_1^1 = (1)$ si trova: $\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2t \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2+2t \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$ $\begin{cases} -2t+1=0 \\ -2+2t+1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow t = \dfrac{1}{2}.$

Concludiamo che $L(W_t)^{\perp} = K \Longleftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ e in tal caso $L(W_{\frac{1}{2}}) = [(-1,-1,-1)] \sim [(1,1,1)]$.

Per risolvere l'ultimo punto si può ragionare anche nel seguente modo: $K = \{(x,y,z) \mid \ x+y+z=0\} = \{(-y-z,y,z) \text{ con } y,z \in \mathbb{R}\} = L[(-1,1,0),(-1,0,1)]$, osserviamo che $L(W_t)^{\perp} = K \Longleftrightarrow (-1,1,0) \cdot (-1,-2t,-2+2t) = 0$ e $(-1,0,1) \cdot (-1,-2t,-2+2t) = 0 \Longleftrightarrow 1-2t=0$ e $-1+2t=0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ e in tal caso $L(W_{\frac{1}{2}}) = [(-1,-1,-1)] \sim [(1,1,1)]$ e $K = L[(-1,1,0),(-1,0,1)]$, dunque la base di K è ortogonale alla base di $L(W_{\frac{1}{2}})$.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x,y,z e t:

$$\begin{cases} 2x+y-z+kt=0 \\ -kx-y+t=0 \\ 2x-y-t=0 \\ x-2t=0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Scriviamo la matrice del sistema: $M_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & k \\ -k & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, applichiamo la regola di Laplace alla terza colonna e successivamente la regola di Sarrus, si trova: $|M_k| = -1 \begin{vmatrix} -k & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2k+2.$

Ora $|M_k| \neq 0 \Longleftrightarrow -2k-2 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq -1$ e in tal caso il sistema lineare ammetterà la soluzione banale $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$, possiamo scrivere $S_k = \{(0,0,0,0)\}$ con $k \neq -1$.

Se $k=-1$ la matrice diventa $M_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, tale matrice ha rango 3 in quanto la sottomatrice $H_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinate non nullo, in tal caso il sistema lineare ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Il generatore dello spazio delle soluzioni è il seguente (ricordiamo che trattasi di un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili e il rango della matrice è 3):

$$S_{-1} = L\left[\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right)\right] =$$

$L\left[(2,3,6,1)\right]$. In sintesi $S_{-1} = \{(2\lambda, 3\lambda, 6\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $v = (1,-1,0)$ è un autovettore di autovalore $\lambda = -1$ e avente $\dim K\text{erf} = 1$.

La nostra applicazione lineare deve verificare la condizione $f(1,-1,0) = -1(1,-1,0) = (-1,1,0)$.

Ora dobbiamo estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$ il sistema $S = [(1, -1, 0)]$, noi prenderemo l'estensione: $C = [(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Teniamo conto che $\dim Kerf = 1$ e conseguentemente $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Poniamo $f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ (un vettore immagine arbitrario purchè non proporzionale all'immagine dell'autovettore per garantirsi $\dim \operatorname{Im} f = 2$).

Riepiloghiamo le immagini sui vettori della base:
$f(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)$
$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$
$f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$
Ora $(x, y, z) = \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \iff (x, y, z) = (\alpha, -\alpha + \beta, \gamma) \iff$
$$\begin{cases} \alpha = x \\ -\alpha + \beta = y \\ \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = x + y \\ \gamma = z \end{cases} .$$

Possiamo scrivere $f(x, y, z) = f[\alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)] = f[x(1, -1, 0) + (x + y)(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)] =$
$= xf(1, -1, 0) + (x+y)f(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(-1, 1, 0) + (x+y)(0, 0, 0) + z(1, 0, 1) = (-x+z, x, z)$

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x, y, z) = (-x + z, x, z)$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_f rispetto al riferimento canonico.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(i) Se A_f è la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica, la legge che definisce f ottiene moltiplicando la matrice A_f con il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dunque $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ $(-x - 2z, 2x + y + 2z, z)$, in forma più compatta $f(x, y, z) = (-x - 2z, 2x + y + 2z, z)$.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:
Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) \\ p(\lambda) &= (-1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$
Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, si ha:
$A_f - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ tale matrice "restituisce" il sistema lineare $\{x + z = 0$

$V_1 = \{(-z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (-1, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 0)$, quindi $V_1 = L\left[(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\right]$. A questo punto già possiamo concludere che l'endomorfismo è diagonalizzabile, l'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ è regolare e l'altro autovalore $\lambda_1 = -1$ essendo una radice semplice è sicuramente regolare.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = -1$.
Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = -1$, si ha:
$A_f + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$
$V_{-1} = \{(-y, y, 0) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (-1, 1, 0)$, quindi $V_{-1} = L\left[(-1, 1, 0)\right]$.
La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio. Vi ricordo che la matrice P non è univocamente determinata, dipende da quali vettori abbiamo scelto nei relativi autospazi.

In ogni caso la matrice P verifica la seguente relazione: $P^{-1} A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Una base di autovettori è la seguente: $T = \left[(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 0)\right]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 0, 1) \qquad Q \equiv (0, 1, 0) \qquad R \equiv (1, -1, 1)$$
$$r : \begin{cases} x + y = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \pi : 2x - y + z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare il piano α che contiene s e perpendicolare a π.
(ii) Determinare la retta l per P complanare con s e parallela a π.
(iii) Calcolare la distanza del punto R dalla retta s.
(iv) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e calcolare il piano β che li contiene.
(v) Determinare il piano γ per Q e parallelo a r e s.

(i) I parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (-1, 0, 1)$, la terna $\overrightarrow{n} = (2, -1, 1)$ rappresenta le componenti di un vettore ortogonale al piano π e $T \equiv (1, 1, 0)$ è un punto di s, il piano α deve soddisfare la seguente condizione:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\alpha : x + 3y + z = 4$$

(ii) La retta cercata per essere complanare con s deve giacere in un piano che contiene s e passante per $P \equiv (-1, 0, 1)$; per essere parallela a π deve essere contenuta in un piano per P e parallelo a π. In definitiva la retta cercata è l'intesezione dei due piani elencati in precedenza. Ora determineremo l'equazione di questi due piani e in maniera preliminare determiniamo un'equazione cartesiana di $s : \begin{cases} x+z=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Fascio di piani per s e passante per $P : \lambda(x+z-1)+\mu(y-1)=0 \Longrightarrow -\lambda-\mu=0 \Longrightarrow \mu=-\lambda$, poniamo $\lambda=1$ e $\mu=-1$. Sostituendo tali valori nel fascio si ottiene il piano: $\alpha_1 : x-y+z=0$.

Per il piano parallelo a π scriviamo $2x-y+z=d$, imponiamo il passaggio per $P \equiv (-1,0,1)$ e otteniamo $d=-1$, quindi $\alpha_2 : 2x-y+z=-1$. Un'equazione della retta l è la seguente:

$$l : \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}.$$

(iii) Determiniamo il piano per R e perpendicolare a $s : -x+z=d$ (i coefficienti di x, y e z sono dati dalla terna $\overrightarrow{s}=(-1,0,1)$) imponiamo il passaggio per $R \equiv (1,-1,1)$ e otteniamo $d=0$, quindi $\delta : x-z=0$. Intersechiamo tale piano con la retta $s : \begin{cases} x=1-t \\ y=1 \\ z=t \\ x-z=0 \end{cases}$ e otteniamo la relazione $1-t-t=0 \Longrightarrow t=\frac{1}{2}$, il punto di intersezione avrà coordinate $D=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$ e la distanza del punto R dalla retta s è data dalla lunghezza del segmento $\overrightarrow{RD}$:

$$d(R,s)=\left|\overrightarrow{RD}\right|=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+(-1-1)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\tfrac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(iv) Determiniamo le componenti dei vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$: $\overrightarrow{PQ}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{PR}=(2,-1,0)$, la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 e quindi i tre punti non sono allineati. Il piano che li contiene deve soddisfare la seguente condizione (piano per uno qualsiasi dei tre punti e con giacitura data dai vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \\ \beta \quad &: \quad x+2y+3z=2 \end{aligned}$$

(v) Intanto determiniamo la direzione di r sviluppando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda=-1$, $\mu=1$, $\nu=1$, quindi $\overrightarrow{r}=(-1,1,1)$. Il piano cercato, dovendo contenere la direzione di r e s e il punto $Q \equiv (0,1,0)$,deve soddisfare la seguente condizione:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ \gamma \quad &: \quad x+z=0 \end{aligned}$$