Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 12 Luglio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_\lambda = [(\lambda-3,1,0),(-\lambda-1,0,1),(\lambda,1,-1)]$$

$$K = \{(x,y,z) \mid \ x-y+z=0\}$$

$$W_t = [(-3t,1,-2+3t)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema S_λ è legato e per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(S_\lambda)$.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(S_\lambda) \cap K$ quando il sistema S_λ è legato.
(iii) Determinare la dimensione di $L(W_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta $L(W_t)^\perp = K$? Giustificare tutte le risposte.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t:

$$\begin{cases} 2x+y-z-kt=0 \\ -kx+y-t=0 \\ 2x-y-t=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $v = (0,1,-1)$ è un autovettore di autovalore $\lambda = -1$ e avente $\dim K\text{erf} = 1$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_f rispetto al riferimento canonico.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1,0,-1) \qquad Q \equiv (0,-1,0) \qquad R \equiv (1,-1,-1)$$

$$r : \begin{cases} x-z=1 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases} \qquad \pi : x+y+2z=0$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare il piano α che contiene s e perpendicolare a π.
(ii) Determinare la retta l per P complanare con s e parallela a π.
(iii) Calcolare la distanza del punto R dalla retta s.
(iv) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e calcolare il piano β che li contiene.
(v) Determinare il piano γ per Q e parallelo a r e s.