Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 12 Luglio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_\lambda = [(-\lambda - 1, 1, 0), (-1, 0, 2 - \lambda), (\lambda, -1, 1)]$$

$$K = \{(x, y, z) \mid \ x + y - z = 0\}$$

$$W_t = [(2t, -1, 2t + 2)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema S_λ è legato e per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(S_\lambda)$.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(S_\lambda) \cap K$ quando il sistema S_λ è legato.
(iii) Determinare la dimensione di $L(W_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta $L(W_t)^\perp = K$? Giustificare tutte le risposte.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t:

$$\begin{cases} 2x - y + z + kt = 0 \\ kx - z + t = 0 \\ 2x - z - t = 0 \\ x - 2t = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $v = (1, 0, -1)$ è un autovettore di autovalore $\lambda = -1$ e avente $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

- **4**. Assegnata la seguente matrice di $\mathbb{R}^3$:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_f rispetto al riferimento canonico.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, 1) \qquad Q \equiv (0, -1, 0) \qquad R \equiv (-1, -1, 1)$$

$$r : \begin{cases} x - y = -1 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases} \qquad \pi : x - 2y + z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare il piano α che contiene s e perpendicolare a π.
(ii) Determinare la retta l per P complanare con s e parallela a π.
(iii) Calcolare la distanza del punto R dalla retta s.
(iv) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e calcolare il piano β che li contiene.
(v) Determinare il piano γ per Q e parallelo a r e s.