

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 12 Luglio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^3, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_\lambda = [(1, -\lambda + 1, 0), (0, \lambda, 1), (1, -\lambda, 1)]$$

$$K = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

$$W_t = [(-1, -2t, -2 + 2t)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema S_λ è legato e per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(S_\lambda)$.

(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(S_\lambda) \cap K$ quando il sistema S_λ è legato.

(iii) Determinare la dimensione di $L(W_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta $L(W_t)^\perp = K$?
Giustificare tutte le risposte.

- 2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t :

$$\begin{cases} 2x + y - z + kt = 0 \\ -kx - y + t = 0 \\ 2x - y - t = 0 \\ x - 2t = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- 3. Assegnato lo spazio vettoriale canonico \mathbb{R}^3 , costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $v = (1, -1, 0)$ è un autovettore di autovalore $\lambda = -1$ e avente $\dim K_{\text{erf}} = 1$.

- 4. Assegnata la seguente matrice di \mathbb{R}^3 :

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette la matrice A_f rispetto al riferimento canonico.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f .

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 0, 1) \quad Q \equiv (0, 1, 0) \quad R \equiv (1, -1, 1)$$

$$r : \begin{cases} x + y = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \pi : 2x - y + z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Determinare il piano α che contiene s e perpendicolare a π .

(ii) Determinare la retta l per P complanare con s e parallela a π .

(iii) Calcolare la distanza del punto R dalla retta s .

(iv) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e calcolare il piano β che li contiene.

(v) Determinare il piano γ per Q e parallelo a r e s .