Indice

0.1 Introduzione

Queste note, dirette agli studenti del Consorzio Nettuno del Polo tecnologico di Napoli, mirano ad un completamento ed ad un'integrazione del corso di Matematica II rispetto alle cassette audiovisive del Consorzio stesso. Lo studente, quindi, **non troverà in queste note un corso completo.** Tutti gli argomenti trattati si trovano ben esposti in un qualsiasi testo di geometria ad uso universitario, pertanto laddove lo studente trovasse la trattazione troppo sintetica può consultare un qualsiasi altro testo. Ciascun paragrafo sarà preceduto da un breve commento che preciserà anche le videocassette in cui lo studente può trovare gli argomenti in esso trattati. Alla fine di ciascun capitolo verranno dati degli esercizi di ricapitolazione alcuni dei quali sono già svolti.

Capitolo 1

Algebra lineare

1.1 Spazi vettoriali

Nelle prime due lezioni del corso (1° cassetta) viene introdotto il concetto di spazio vettoriale, di sottospazio, di vettori linearmente indipendenti e linearmente dipendenti. Nella terza lezione (2° cassetta) ci si occupa di generatori, basi e dimensione di uno spazio vettoriale. Si vuole qui solo precisare qualcosa su tali argomenti, richiamando prima le definizioni essenziali. Si ricorda che per avere uno spazio vettoriale, di cui non si riporta la definizione, perche è data nella cassetta n.l, é necessario avere un campo detto campo degli scalari. Negli esempi che verrano di volta in volta riportati, si sceglierà, salvo avviso contrario, come campo degli scalari il campo R dei numeri reali, cosi come nelle videocassette.
Volendo si può sostituire al campo R un qualsiasi altro campo, come ad esempio il campo C dei numeri complessi.

Definizione 1.1.1 *Un sottoinsieme W di un spazio vettoriale V su un campo* K *si dice* **sottospazio** *se risulta uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V ristrette a W.*

In base a tale definizione, per verificare che un dato sottoinsieme é un sottospazio bisogna verificare gli otto assiomi di spazio vettoriale.
Fortunatamente al riguardo esiste un criterio che ci permette di semplificare la questione. Viene dato solo l'enunciato di tale criterio.

Proposizione 1.1.2 *Dato un sottoinsieme W di uno spazio vettoriale V, esso é un sottospazio se e solo se é chiuso ripetto alle operazioni di somma tra vettori e moltiplicazione di uno scalare per un vettore, ossia per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in W ed ogni scalare $a \in \mathbf{R}$ deve risultare $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ e $a\mathbf{v} \in W$.*

Esempio. Lo studente verifichi, prima in base alla definizione e poi in base alla proposizione 1.1.2 che l'insieme

$$W = \{(x, y, 2x + y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

é un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
Mentre

$$W' = \{(x, x + y, y^2) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

non é un sottospazio.

Definizione 1.1.3 *Un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ si dice* **linearmente indipendente** *se vale la seguente implicazione:*

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Diversamente il sistema di vettori si dirá **linearmente dipendente***.*

In altri termini un insieme di vettori é linearmente indipendente se l'unica combinazione lineare che dá il vettore nullo é quella a coefficienti tutti nulli.

Quando si dá un insieme di vettori riveste una certa importanza, come risulterá chiaro quando si parlerá di componenti, anche l'ordine dei vettori, ecco uno dei motivi per cui talvolta si parlerá di *sistema* di vettori piuttosto che di insieme di vettori. Ad esempio in $\mathbf{R}^3$ gli insiemi

$$A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \; B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\},$$

sono la stessa cosa in senso insiemistico, ma differenti come sistemi di vettori.
Esistono semplici criteri, che é bene tener presente, i quali talvolta permettono di verificare subito la dipendenza o meno di un dato sistema di vettori.

Proposizione 1.1.4 *Se un sistema di vettori S contiene il vettore nullo, allora é linearmente dipendente.*

Dim. Sia $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$. Per fissare le idee si supponga $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, allora

$$1\mathbf{0} + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

é una combinazione lineare nulla a scalari non tutti nulli, dunque il sistema é linearmente dipendente. $\square$

Proposizione 1.1.5 *Un sistema di vettori S è linearmente dipendente se e solo se un vettore di S dipende linearmente dai rimanenti.*

Dim. Sia $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$. Si supponga

$$\mathbf{v}_1 = a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n;$$

allora

$$\mathbf{v}_1 - a_2\mathbf{v}_2 - \cdots - a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

ossia esiste una combinazione lineare nulla dei vettori di S a scalari non tutti nulli, quindi S é linearmente dipendente.
Viceversa, se S é linearmente dipendente esiste la combinazione

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

a scalari non tutti nulli. Se, per esempio, é $a_1 \neq 0$, allora

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\mathbf{v}_n,$$

cioé la tesi. $\square$

Dato un sistema di vettori $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ di uno spazio vettoriale V, si dice che un certo vettore $\mathbf{u}$ é combinazione lineare dei vettori di S se esistono gli scalari $a_1, ..., a_n$ tali che

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v_1} + \cdots + a_n\mathbf{v_n}.$$

Un sistema di vettori si dice di **generatori** per un certo spazio vettoriale se ogni vettore dello spazio vettoriale é combinazione lineare di quei vettori [1]. D'altra parte dato il sistema di vettori $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ di un certo spazio vettoriale V si denota con $L(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ oppure con $L(S)$ l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$. Si prova facilmente che tale

[1] In queste note si prenderanno in considerazione solo gli spazi vettoriali *finitamente generati*, cioé generati da un numero finito di vettori

insieme é un sottospazio di V, ed é il piú piccolo sottospazio contenente i vettori di S (lo studente lo verifichi sfruttando la proposizione 1.1.2). $L(S)$ viene detto **sottospazio generato** dai vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

Infine si ricorda che un insieme S di vettori si dice **base** per un certo spazio vettoriale V se é un insieme di generatori per V e se é un insieme di vettori linearmente indipendenti. A questo punto é possibile enunciare e dimostrare un teorema dato nella seconda lezione.

Teorema 1.1.6 *Sia dato un sistema di vettori $S = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale V. Il sitema S é linearmente indipendente se e solo se ogni vettore di $L(S)$ é esprimibile in unico modo come combinazione lineare dei vettori di S, cioé gli scalari che intervengono nella combinazione lineare sono univocamente determinati.*

Dim. Si supponga prima che il sistema S sia linearmente indipendente. Detto $\mathbf{v}$ un generico vettore di $L(S)$, sia

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n,$$

e si supponga che esista un'altra combinazione lineare dello stesso vettore

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n.$$

Sottraendo membro a membro le due combinazioni lineari si ottiene

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n,$$

da cui, essendo i vettori $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}$ per ipotesi linearmente indipendenti, si ottiene $a_i = b_i$ per ogni indice i, ossia gli scalari che intervengono nella combinazione lineare sono univocamente determinati.
Il viceversa é ovvio, perché $\mathbf{0}$ é in $L(S)$, e poiché per ipotesi esso é dato solo dalla combinazione lineare a coefficienti tutti nulli si ottiene che S é linearmente indipendente. $\square$

Dal suddetto teorema si capisce che é priva di ambiguitá la seguente:

Definizione 1.1.7 *Dato un sistema di vettori $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ linearmente indipendente di uno spazio vettoriale V, ed un vettore $\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, allora gli scalari $a_1, ..., a_n$ si dicono* **componenti** *del vettore $\mathbf{v}$ rispetto al sistema S, e la n-pla ordinata $(a_1, \ldots, a_n)$ si dice vettore delle componenti di $\mathbf{v}$ in S.*

Il fatto che i vettori di S siano linearmente indipendenti ci assicura che gli scalari $a_1, ..., a_n$ siano univocamente determinati, avendo poi utilizzato un sistema di vettori e non un generico insieme, possiamo dire che anche l'ordine degli scalari é univocamente determinato.

Si raccomanda lo studente di eseguire diversi esercizi per verificare se dati sottoinsiemi sono sottospazi e se dati insiemi di vettori sono o meno linearmente indipendenti, anche se in seguito riguardo quest'ultima questione verrá dato un metodo molto piú pratico.

Premessoció si passa ad enunciare il seguente

Teorema 1.1.8 *Dati due sistemi di vettori* $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_h\}$ *e* $T = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k\}$ *si supponga che il sistema* S *sia linearmente indipendente e che i suoi vettori dipendano linearmente dai vettori di* T*, allora* $h \leq k$*.*

Da questo teorema segue subito il seguente

Corollario 1.1.9 *Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalitá.*

Dim. Si rimanda alle videocassette per la dimostrazione.

Definizione 1.1.10 *Se lo spazio vettoriale* V *ha una base di cardinalitá* n*, tale numero si dice* **dimensione** *dello spazio vettoriale* V*.*

Chiaramente la definizione di dimensione é ben posta grazie al precedente corollario.
Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{R}$, e sia $\mathbf{u}$ un vettore di V. Allora $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, dove gli scalari $a_1, ..., a_n$ sono univocamente determinati da $\mathbf{u}$ e $\mathcal{B}$. La n-pla $(a_1, ..., a_n)$ si dice n-pla delle **componenti** di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ oppure **coordinate** di $\mathbf{u}$ nella base $\mathcal{B}$.
Gli spazi vettoriali piú utilizzati in questo corso sono gli $\mathbf{R}^n$ sul campo dei reali. Fissato n, una base di $\mathbf{R}^n$, come é facile provare, é data da $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ dove

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0, 0), \\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.., \\ \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 0, 1). \end{array}$$

Questa base prende il nome di **base canonica** di $\mathbf{R}^n$. Intanto si osservi che la dimensione di $\mathbf{R}^n$ é proprio *n*, ma l'utilità della base canonica si capisce quando si vanno a scrivere le componenti di un vettore rispetto a quella base. Ad esempio, fissato $n = 3$, si vede facilmente che

$$(3, 1, -2) = 3(1, 0, 0) + 1(0,1, 0) - 2(0, 0,1).$$

Si può provare in generale che la *n*-pla delle componenti di un generico vettore di $\mathbf{R}^n$ nella base canonica coincide con la *n*-pla che rappresenta il vettore stesso.

Riguardo le basi di uno spazio vettoriale esistono alcune caratterizzazioni espresse dal teorema seguente, del quale non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 1.1.11 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo* **R** *ed S un sistema di vettori di V. Le seguenti sono equivalenti.*

1. *S* e *una base di V;*
2. *S* e *indipendente massimale, nel senso che non* e *contenuto propriamente in alcun sistema indipendente;*
3. *S* e *minimale di generatori per V, nel senso che non contiene propriamente alcun sistema di generatori per V.*

Nelle videocassette é ben spiegato come ottenere da un sistema di generatori una base, d'altra parte é possibile completare un qualsiasi sistema linearmente indipendente in una base (si dimostra, ma non lo facciamo). Comunque queste procedure sono molto più semplici da applicare con la tecnica delle matrici, trattate nei paragrafi successivi. Al riguardo si vedrà qualcosa negli esercizi.

Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale, con H e K due suoi sottospazi .
L'intersezione dei due sottospazi è l'insieme:

$$H \cap K = \left\{ v \in V \mid v \in H \text{ e } v \in K \right\}$$

Si dimostra che l'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio vettoriale di V, vale cioè la seguente:

Proposizione *Se H e K sono due sottospazi di uno spazio vettoriale, allora anche* $H \cap K$ *è un sottospazio di V.*

Esempio Consideriamo lo spazio vettoriale numericoR^3 ed i sottoinsiemi, $H = \{(x,\ y,\ z) \mid x = 0\}$ e $K = \{(x,\ y,\ z) \mid z = 0\}$.
Si può verificare facilmente che *H* e *K* sono dei sottospazi vettoriali di R^3. *H* é costituito dalle terne che hanno la prima componente 0 mentre *K* é costituito da tutte le terne che hanno come ultima componente 0.
Allora $H \cap K$ è formato da tutte quelle terne che hanno nulla la prima e l'ultima componente, cioè $H \cap K = \{(x,\ y,\ z) \mid x = 0 \text{ e } z = 0\}$ anche per esso si può verificare che si tratta di un sottospazio vettoriale di R^3.

Se H e K sono sottospazi di V, cosa si può dire dell'insieme $H \cup K$?
E' anche esso stesso un sottospazio vettoriale di V ?

Vediamo di trarre una conclusione relativamente al caso precedente. Risulta evidente che $H \cup K = \{(x,\ y,\ z) \mid x = 0 \text{ oppure } z = 0\}$, quindi sia il vettore $v_1 = (0,\ 1,\ 1)$ che il vettore $v_2 = (1,\ 2,\ 0)$ appartengono ad $H \cup K$. Se $H \cup K$ fosse un sottospazio vettoriale di R^3 dovrebbe essere stabile rispetto alla somma e quindi ad esso dovrebbe appartenere il vettore $v = v_1 + v_2 = (0,\ 1,\ 1) + (1,\ 2,\ 0) = (1,\ 3,\ 1)$ e questo non accade perché né la prima e né l'ultima componente è nulla, concludiamo che $H \cup K$ non è un sottospazio vettoriale di R^3.

In generale l'unione di due sottospazi è solo un insieme di vettori.
Diamo allora la seguente definizione:

Definizione *Se H e K sono due sottospazi di uno spazio vettoriale, si definisce il seguente insieme di vettori:*

$$H + K = \{u + v \mid u \in H \text{ e } v \in K\}$$

Si dimostra che la somma di due sottospazi è ancora un sottospazio vettoriale di *V*, vale cioè la seguente

Proposizione *Se H e K sono due sottospazi di uno spazio vettoriale, allora anche* $H + K$ *è un sottospazio di V. Tale sottospazio coincide con lo spazio generato dal sistema* $H \cup K$.

Esempio: (sviluppare l'esempio precedente)
Abbiamo visto che se *H* e *K* sono due sottospazi vettoriali di *V*, allora possiamo costruire altri due sottospazi che sono lo spazio intersezione $H \cap K$ e lo spazio somma $H + K$.

Se supponiamo che V sia uno spazio vettoriale di dimensione n, allora anche le dimensioni dei precedenti sottospazi sarà un intero che in generale risulta minore o uguale ad n. Esiste una relazione che lega le dimensioni dei precedenti quattro sottospazi di V:

Proposizione *Se H e K sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, allora*

$$\dim(H) + \dim(K) = \dim(H \cap K) + \dim(H + K)$$

Esempio *Vediamo come possiamo utilizzare tale relazione in un caso particolare e relativo ai sottospazi dell'esempio precedente.*

$H = \{(x, \ y, \ z) \mid x = 0\}$ è costituito dai vettori $v \in \{(0, \ y, \ z) \mid \text{con } y, \in R\}$.
Un sistema di generatori di H è dunque $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, essendo indipendenti, tali vettori risultano essere una base di H che ha quindi dimensione 2. Allo stesso modo $K = \{(x, \ y, \ z) \mid z = 0\}$ e quindi è costituito dai vettori del tipo $\{(x, \ y, \ 0) \mid \text{con } x, \ y \in R\}$.
Un sistema di generatori di K è pertanto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, essendo indipendenti tali vettori risultano essere una base di K che ha quindi dimensione 2. Lo spazio intersezione è $H \cap K = \{(x, \ y, \ z) \mid x = 0 \text{ e } z = 0\}$ ovvero $\{(0, \ y, \ 0) \mid \text{con } y \in R\}$, un sistema di generatori è $\{(0, 1, 0)\}$, tale sistema è indipendente è risulta essere una base di $H \cap K$ che ha quindi dimensione 1.

Dalla possiamo dedurre qualcosa riguardo allo spazio somma H+K, infatti:

$$\dim(H + K) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$$

$$\dim(H + K) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Il sottospazio $H + K$ ha dimensione 3 e poiché l'unico sottospazio di dimensione 3 è proprio R^3, concludiamo che $H + K = R^3$.

1.2 Applicazioni lineari

Definizione 1.2.1 *Dati due spazi vettoriali V e V sullo stesso campo* **R**, *un'applicazione f di V in V' si dice lineare se f* (**v** + **w**) = *f* (**v**) + *f* (**w**) e *f(a***v***)* = a *f*(**v**) *comunque vengano scelti* **v** e **w** *in V ed a in* **R.**

Si dimostreranno alcune semplici proprietà soprattutto per mostrare come viene utilizzata la definizione nelle dimostrazioni.

Proposizione 1.2.2 *Se f é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e V', allora*

> *1)* $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$, *comunque sia scelto* $\mathbf{v} \in V$*;*
> *2)* $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$*;*

avendo denotato con $\mathbf{0}$ *ed* $\mathbf{0}'$ *i vettori nulli rispettivamente di V e V'.*

Dim. É noto che comunque venga scelto il vettore $\mathbf{v}$ in V risulta $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$. Dunque, essendo f lineare,

$$f(-\mathbf{v}) = f((-1)\mathbf{v}) = (-1)f(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}).$$

Ora si puó provare facilmente anche il secondo asserto:

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{v} - \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}'.$$

□

D'ora in poi per il vettore nullo di V' si userá lo stesso simbolo $\mathbf{0}$ che si usa per il vettore nullo di V, poiché sará chiaro dal contesto a quale spazio vettoriale appartiene.
Ricordiamo che si dice **nucleo** ($Ker\, f$) di un'applicazione lineare l'insieme dei vettori di V la cui immagine é il vettore nullo di V'. Si dice **immagine** di f ($Im\, f$) il sottoinsieme di V' costituito dai vettori che sono immagine di almeno un vettore di V mediante f.

Proposizione 1.2.3 *Il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare* $f : V \to V'$ *sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e di V'.*

Dim. Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ due elementi di $Ker\, f$, allora

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0};$$

dunque $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in Ker\, f$. Inoltre, se $a \in \mathbf{R}$, si ha

$$f(a\mathbf{v}_1) = af(\mathbf{v}_1) = a\mathbf{0} = \mathbf{0};$$

pertanto anche $a\mathbf{v}_1 \in Ker\, f$. Quindi per la proposizione 1.1.2 $Ker\, f$ é un sottospazio di V.
Siano ora $\mathbf{w}_1 = f(\mathbf{v}_1)$ e $\mathbf{w}_2 = f(\mathbf{v}_2)$ due vettori di $Im\, f$ ed a un qualsiasi scalare. Allora, tenendo sempre presente la linearitá di f,

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2);$$

e

$$a\mathbf{w}_1 = af(\mathbf{v}_1) = f(a\mathbf{v}_1).$$

Quindi, per la proposizione giá citata, $Im\, f$ é un sottospazio di V'. $\square$

Dalla definizione di funzione suriettiva segue poi che

$$f \text{ é suriettiva } \Leftrightarrow\ Im\, f = V'.$$

Mentre si prova che

$$f \text{ é iniettiva } \Leftrightarrow\ Ker\, f = \{\mathbf{0}\}.$$

Infatti se f é iniettiva é ovvio che l'unico vettore che ha per immagine il vettore nullo é il vettore nullo di V. Viceversa sia $Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$ allora se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono due vettori tali che $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$ risulta $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ e pertanto, essendo $Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$, risulta $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{v}_1$=$\mathbf{v}_2$, ossia f iniettiva.

Definizione 1.2.4 *Data un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ si dice* **rango** *di f la dimensione del sottospazio Imf di W.*

Definizione 1.2.5 *Un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ che sia iniettiva e suriettiva (dunque biiettiva) si dice* **isomorfismo** *di V in W.*
Due spazi vettoriali V e W si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo di V in W.
Un isomorfismo di V in sé viene detto **automorfismo**.

Si osservi che se uno spazio vettoriale V ha dimensione finita n sul campo $\mathbf{K}$ allora fissare una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n\}$ equivale a fissare un isomorfismo di V nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{K}^n$. Precisamente se $\mathbf{v} \in V$, allora l'isomorfismo associato alla base B fissata é:

$$\phi_B\ :\ \mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots a_n\mathbf{e}_n \in V\ \longrightarrow\ (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n.$$

Ne segue che gli spazi vettoriali di una fissata dimensione finita n su un campo $\mathbf{K}$ sono tutti tra loro isomorfi, ecco perché volendo studiare gli spazi vettoriali di dimensione finita sul campo reale é lecito limitarsi a considerare solo gli $\mathbf{R}^n$.

Vale poi il seguente teorema che qui non dimostriamo, ma lo studente potrebbe provare a dimostrarlo per esercizio.

Teorema 1.2.6 *Sia data un'applicazione lineare f dello spazio vettoriale V nello spazio vettoriale W, e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$ h vettori fissati in V. Allora valgono le seguenti:*

> *1) se i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$ sono dipendenti lo sono anche i vettori $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_h)$;*
> *2) se i vettori $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_h)$ sono indipendenti lo sono anche i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$;*
> *3) se f é iniettiva ed i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$ sono indipendenti allora lo sono anche i vettori $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_h)$.*

Un teorema sicuramente importante nelle applicazioni, ma di dimostrazione un po' piú elaborata é il seguente:

Teorema 1.2.7 *Se V é uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f : V \longrightarrow W$ é un'applicazione lineare, allora vale la seguente identitá dimensionale:*

$$dim(Ker\, f) + dim(Im\, f) = dim\, V.$$

1.3 Matrici

Le matrici vengono trattate nelle videocassette nelle lezioni 4,5 e 6. In queste note vengono qui richiamate le definizioni e gli enunciati piú importanti, inoltre vengono enunciati alcuni teoremi non dati nelle videocassette per poi presentare alcuni esempi di applicazioni della teoria delle matrici per la risoluzione di problemi di algebra lineare.

Data una matrice A di tipo $[m, n]$, cioé con m righe ed n colonne, ad elementi reali, é noto che le righe della matrice sono vettori numerici di lunghezza n, mentre le colonne della matrice sono vettori di lunghezza m, dunque si tratta di vettori appartenenti in generale a spazi vettoriali distinti, vale peró il seguente importante risultato:

Teorema 1.3.1 *Il numero massimo di righe linearmente indipendenti in una qualsiasi matrice é pari al numero massimo di colonne linearmente indipendenti.*

Ha senso dunque la seguente

Definizione 1.3.2 *Si dice* **rango** *di una matrice A il massimo numero di righe o colonne indipendenti di A.*

Si ricorda che una matrice si dice **quadrata** se il numero di righe della matrice é pari al numero di colonne della stessa. Ad ogni matrice quadrata A resta associato un numero (reale se la matrice é ad elementi reali) detto **determinante** di A e denotato con $detA$ o con $|A|$. Non vogliamo qui richiamare le regole di calcolo del determinante, é bene peró tener presente il seguente

Teorema 1.3.3 *Una matrice quadrata d'ordine n ha rango massimo, cioé pari al proprio numero di righe, se e solo se il suo determinante é non nullo.*

Data una matrice A di tipo $[m,n]$ si dice **matrice quadrata subordinata** di A d'ordine h una matrice ottenuta considerando gli elementi di A appartenenti agli incroci di h righe ed h colonne di A fissati ad arbitrio. Si dice **minore d'ordine** h di A il determinante di una matrice subordinata di A d'ordine h.
Ad esempio si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ -6 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

un suo minore del secondo ordine é dato da

$$M_{(1,3)}^{(3,5)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

ottenuto fissando nella matrice A le colonne 3° e la 5° e le righe 1° e 3°.
Infine si dice **orlato** di un minore il determinante di una matrice subordinata quadrata ottenuta da un minore aggiungendo una riga ed una colonna della matrice originaria. Ad esempio, riferendoci alla matrice A appena introdotta, il minore M si potrebbe orlare mediante la 2° riga e la 2° colonna per ottenere:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

ma é chiaro che il suddetto non é l'unico orlato del minore considerato.
Si ha il seguente importante risultato

Teorema 1.3.4 (degli orlati) *Data un matrice A di tipo qualsiasi, il rango di A é h se e solo se esiste un minore di A d'ordine h non nullo tale che tutti gli orlati di questo minore sono nulli.*
Inoltre le righe e le colonne linearmente indipendenti della matrice sono proprio quelle che intervengono nel minore non nullo.

Se lo studente trova complicata la teoria appena esposta, tenga presente che si ottengono esattamente gli stessi risultati con le trasformazioni elementari.

Esempio. In $\mathbf{R}^3$ siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,3)$ e $\mathbf{v}_3 = (4,-1,3)$. Dire se sono indipendenti, ed in caso negativo mostrare il sottosistema massimo indipendente.
Si svolgerá questo esercizio in due modi.

1° **metodo**
Calcolando il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

si vede che é 0, dunque i vettori sono dipendenti, ma non sappiamo ancora quanti di loro sono indipendenti, né quali sono. Consideriamo il minore formato dalle prime due colonne e dalle prime due righe:

$$M_{(1,2)}^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0.$$

Dunque in base al teorema degli orlati possiamo dire che il rango della matrice é due e le righe indipendenti sono le prime due, ovvero dei tre vettori dati all'inizio i primi due sono indipendenti ed il terzo dipende linearmente da questi.
2° **metodo**
Si consideri sempre la matrice A le cui righe sono i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Eseguendo nell'ordine le seguenti trasformazioni elementari:

$$R_2' = R_2 + (-2)R_1, \quad R_3' = R_3 + (-4)R_1, R_3' = R_3 + (-1)R_2, \quad R_2' = (1/3)R_2,$$

lo studente puó verificare che si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la quale ha rango due. Dunque anche A ha rango due e, poiché nelle trasformazioni elementari eseguite non é stato mai effettuato uno scambio tra righe, si ottiene che le righe indipendenti di A sono le prime due.

Osservazione L'aver riconosciuto che nel sistema di vettori assegnato solo due vettori su tre sono indipendenti ci dice anche che lo spazio vettoriale $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ha dimensione due ed una sua base é $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Esempio In $\mathbf{R}^3$ insieme ai vettori dell'esempio precedente si consideri il vettore $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0)$. Quest'ultimo appartiene al sottospazio generato dai primi tre?

Ci si chiede in sostanza se il quarto vettore dipende dai primi tre, si potrebbe allora scrivere il vettore $\mathbf{v}_4$ in funzione dei primi tre con gli scalari incogniti, ricavare un sistema lineare e studiarlo. Peró possiamo procedere anche nel seguente modo (forse piú elegante). Sia H il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Intanto sappiamo che tale sottospazio é in effetti generato dai primi due vettori, dunque il vettore $\mathbf{v}_4$ appartiene ad H se e solo se la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango due.
Calcolando il determinante di questa matrice con la regola di Laplace applicata all'ultima riga si ha:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Dunque i vettori sono indipendenti e $\mathbf{v}_4 \notin H$.

1.4 Sul prodotto scalare

Definiamo ora una nuova operazione tra i vettori che viene detta prodotto scalare.

Definizione 1.4.1 *Siano* $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *e* $\mathbf{w} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *due vettori dello spazio vettoriale numerico reale* R^n*. Si dice* **prodotto scalare** *di* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *il numero reale definito da*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Per il prodotto scalare si possono dimostrare facilmente le seguenti proprietá:

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$;
2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$;
3. $c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (c\mathbf{w})$, per ogni $c \in R$;
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$;

5. per ogni vettore $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Dalle proprietá appena enunciate segue che ha senso la seguente:

Definizione 1.4.2 *Dato un vettore* $\mathbf{v}$ *di* R^n *si dice* **norma** *o* **lunghezza** *di* $\mathbf{v}$ *il numero reale non negativo*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

É immediato provare che per ogni $a \in R$ e per ogni $\mathbf{v} \in R^n$ vale la seguente:

$$\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|.$$

Valgono poi due disuguaglianze notevoli che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 1.4.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Se* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono vettori di* R^n *si ha*

$$|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|,$$

valendo l'uguaglianza se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti.

Teorema 1.4.4 *Se* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono due vettori di* R^n *allora*

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|,$$

valendo l'uguaglianza se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti.

Completiamo questi brevi richiami sul prodotto scalare con delle definizioni che risulteranno utili succesivamente nel corso.

Definizione 1.4.5 *Due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *di* R^n *si dicono ortogonali se e solo se*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Se $\mathbf{v}$ é un vettore si denota con $\mathbf{v}^\perp$ l'insieme dei vettori ortogonali a $\mathbf{v}$. Si prova facilmente che $\mathbf{v}^\perp$ é un sottospazio di V. Il sottospazio $\mathbf{v}^\perp$ viene detto **sottospazio perpendicolare** a $\mathbf{v}$. La stessa definizione si sarebbe potuta dare con un qualsiasi sottoinsieme di V, ad esempio dato un sottospazio U di V é possibile considerare l'insieme $U^\perp$ costituito da tutti i vettori di V perperdicolari ad ogni vettore di U. Si prova facilmente che $U^\perp$ é un sottospazio di V, inoltre valgono le seguenti proprietá

1) $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$;
2) $V = U + U^\perp$;

il che si esprime brevemente dicendo che V é somma diretta di U ed $U^\perp$ e si scrive $V = U \oplus U^\perp$.

Definizione 1.4.6 *Due vettori non nulli* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *si dicono* **paralleli** *se e solo se esiste uno scalare* $\lambda \in \mathbf{R}$ *tale che* $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$.

Ulteriori osservazioni sul prodotto scalare ed in particolare l'interpretazione geometrica delle proprietá enunciate saranno discusse nella parte dedicata agli esercizi di geometria analitica.

1.5 Applicazioni lineari e matrici

Siano V e V' due spazi vettoriali sul campo reale di dimensioni rispettivamente n ed m, e si supponga di aver fissato le basi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ per V ed $B' = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ per V'. Infine sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Una volta che sappiamo che f é lineare la sua azione sul generico vettore di V é univocamente determinata dalla sua azione sui vettori della base. Infatti se $\mathbf{v} \in V$ si ha $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ dove gli scalari α_i sono univocamente determinati. Allora $f(\mathbf{v}) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$. Dunque conoscere le n uguaglianze

$$
\begin{array}{rcl}
f(e_1) & = & a_{11}l_1 + a_{21}l_2 + \cdots + a_{m1}l_m \\
f(e_2) & = & a_{12}l_1 + a_{22}l_2 + \cdots + a_{m2}l_m \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
f(e_n) & = & a_{1n}l_1 + a_{2n}l_2 + \cdots + a_{mn}l_m
\end{array}
$$

equivale a conoscere l'azione dell'applicazione lineare f su tutto lo spazio V. Nel caso siano note le basi fissate nei due spazi vettoriali, la conoscenza delle suddette uguaglianze equivale alla conoscenza della matrice di tipo $[m, n]$

$$
M_f = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}.
$$

Si osservi che la colonna i-esima della matrice M_f é il vettore numerico delle componenti di $f(e_i)$ nella base fissata B'.

La matrice M_f si dice **matrice associata all'aplicazione lineare** f, chiaramente tale matrice dipende anche dalle basi fissate nei due spazi vettoriali, ecco perché talvolta per la matrice associata si usa il simbolo $M_{B,B'}(f)$. Cambiando le basi nei due spazi vettoriali esiste un preciso legame tra le matrici associate alla stessa applicazione lineare. Senza voler ulteriormente approfondire la questione in questo contesto richiamiamo solo che due matrici quadrate A e B d'ordine n sui reali rappresentano lo stesso endomorfismo di R^n se e solo se sono **simili**, ossia esiste una matrice P non singolare (cioé $det(P) \neq 0$) tale che

$$A = P^{-1}BP.$$

Lo studente che volesse approfondire l'argomento puó consultare uno qualsiasi dei tanti testi specializzati di algebra lineare.

Sia $\mathbf{v}$ il generico vettore di V e sia $X = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ il vettore numerico delle componenti di $\mathbf{v}$ in B. Se Y denota il vettore numerico delle componenti di $f(\mathbf{v})$ nella base B', allora, scrivendo i vettori numerici come vettori colonna, vale la seguente equazione matriciale:

$$Y = M_f X;$$

dunque la matrice M_f ci permette di leggere l'azione dell'applicazione lineare f direttamente sulle componenti dei vettori nelle basi fissate.
Si puó ora provare il seguente

Teorema 1.5.1 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare ed M_f la matrice associata che la rappresenta nelle basi B e B' rispettivamente di V e W. Il rango di f é pari al rango di M_f.*

Dim. Si ricorda che il rango di f per definizione é la dimensione di Imf. Se $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, evidentemente $S = \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ genera Imf, dunque per individuare la dimensione di Imf é sufficiente individuare il massimo numero di vettori indipendenti in S. Sia $\Psi_{B'}$ l'isomorfismo, giá introdotto nel paragrafo 2, che associa al generico vettore $\mathbf{v}'$ di W il vettore numerico di R^m dato dalle componenti di $\mathbf{v}'$ nella base B'. In quanto isomorfismo $\Psi_{B'}$ trasforma vettori indipendenti o dipendenti in vettori rispettivamente indipendenti o dipendenti, allora il numero massimo di vettori indipendenti in S é pari al numero massimo di vettori indipendenti nell'insieme $\{\Psi_{B'}(f(e_1)), \Psi_{B'}(f(e_2)), \ldots, \Psi_{B'}(f(e_n))\}$, ma questi ultimi sono esattamente le colonne della matrice M_f e quindi si ha subito la tesi dalla definizione di rango di una matrice. $\square$

*** Dal precedente teorema segue anche che cambiando le basi le matrici associate ad una stessa applicazione lineare hanno tutte lo stesso rango.

1.6 Sistemi lineari

Si dice sistema lineare un insieme di equazioni di primo grado in un certo numero di incognite. Considereremo sempre equazioni a coefficienti reali.
Si consideri il generico sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

in m equazioni e nelle n incognite $x_1, ..., x_n$.
Si dice **soluzione** del sistema lineare (1.1) una n-pla di scalari $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ che sia soluzione di ciascuna equazione del sistema.
Un sistema lineare si dice **compatibile** o **risolubile** se ammette almeno una soluzione, altrimenti si dirá **incompatibile**. Si vedrá che un sistemma ammette zero, una o infinite soluzioni.
Ad ogni sistema lineare restano associate due matrici. Riferendoci sempre al generico sistema (1.1), diremo **prima matrice** o **matrice dei coefficienti** o **matrice incompleta** la matrice di tipo $[m, n]$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

mentre si dice **matrice completa** o **seconda matrice** associata al sistema, la matrice di tipo $[m, n+1]$:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix};$$

ossia la matrice ottenuta da A aggiungendo la colonna dei termini noti. Si vedrá che lo studio del sistema lineare si riduce in pratica allo studio delle suddette matrici. A questo punto posto

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

il sistema si puó scrivere nella forma matriciale

$$AX = \boldsymbol{b}. \tag{1.2}$$

Se $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono i vettori colonna (di lunghezza m) della matrice A, il precedente sistema si puó anche scrivere nella forma

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_n C_n = \boldsymbol{b}.$$

Il lettore puó facilmente verificare la precedente uguaglianza assegnando dei valori piccoli ad m ed n.
Ora $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ é una soluzione del sistema se e solo se

$$\xi_1 C_1 + \xi_2 C_2 + \cdots \xi_n C_n = \boldsymbol{b};$$

dunque $\boldsymbol{b}$ é combinazione lineare dei vettori $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ma vale anche il viceversa, cioé se $\boldsymbol{b}$ é combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A, allora i coefficienti della combinazine lineare forniscono una soluzione del sistema. Resta dunque provato il seguente

Teorema 1.6.1 *Un sistema lineare é compatibile se e solo se il vettore colonna dei termini noti é linearmente dipendente dai vettori colonna della matrice incompleta del sistema.*

Una conseguenza del precedente risultato é il seguente teorema fondamentale, del quale peró si preferisce non riportare la dimostrazione

Teorema 1.6.2 *Un sistema lineare é compatibile se e solo se il rango della matrice incompleta del sistema é pari al rango della matrice completa.*

Se la colonna dei termini noti é il vettore nullo il sistema lineare si dice **omogeneo**. Poiché aggiungendo il vettore nullo ad un sistema di vettori il numero massimo di vettori indipendenti del sistema stesso non varia, dal precedente teorema si ottiene subito il seguente:

Corollario 1.6.3 *Un sistema lineare omogeneo é sempre compatibile.*

I suddetti teoremi ci permettono subito di stabilire se un dato sistema lineare ammette soluzioni o meno, ma non ci dicono nulla sul numero delle eventuali soluzioni del sistema.
Assegnato un generico sistema lineare del tipo

$$AX = \boldsymbol{b}$$

denotiamo con ρ il rango della matrice incompleta e con ρ' il rango della matrice completa del sistema. Si cominci con l'osservare che se n é il numero delle incognite del sistema allora $\rho \leq n$, perché n é il numero di colonne di A. Nel caso dei sistemi compatibili il numero $\rho = \rho'$ viene anche detto **rango del sistema**.

Teorema 1.6.4 *Sia dato un sistema lineare $AX = \boldsymbol{b}$ in n incognite, allora*

> *a) il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $n = \rho = \rho'$, cioé il numero delle incognite é pari al rango del sistema;*
> *b) se $\rho = \rho' < n$ allora il sistema ammette $\infty^{n-\rho}$ soluzioni, cioé in questo caso esistono $n - \rho$ incognite che possono assumere valore arbitrario, in corrispondenza di tali valori assegnati, poi, la soluzione del sistema é unica.*

Lo studente potrebbe trovare l'ultima parte dell'enunciato un po' complicata da comprendere, comunque sicuramente il senso dello stesso sará piú chiaro quando si saranno studiati degli esempi.

In effetti a questo punto si ha tutta la teoria necessaria per studiare i sistemi lineari, ma mancano ancora le tecniche necessarie per risolvere gli stessi.
Innanzitutto non abbiamo ancora detto niente sul numero m, cioé sul numero di equazioni che intervengono in un sistema lineare. Se $m > n$ allora le righe della matrice incompleta A eccedono le colonne, pertanto sicuramente é $m > \rho = rngA$. É sempre lecito individuare nella matrice completa A' le righe indipendenti e sostituire il sistema iniziale con quello ottenuto considerando solo le righe indipendenti di A'. Argomentazioni teoriche piú approfondite ci assicurano che questo procedimento non fa perdere alcuna informazione importante sul sistema lineare iniziale, nel senso che il sistema iniziale é compatibile se e solo se lo é il nuovo, e le eventuali soluzioni nei

due sistemi sono esattamente le stesse. In breve si dice che si é sostiutito il sistema iniziale con uno ad esso equivalente.
Negli esempi che seguono si mostrerá praticamente come passare da un sistema lineare ad uno piú semplice, ma equivalente, inoltre si dará un tecnica risolutiva.
Esempio 1 Si studi il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ 3x-y &= -2 \\ 2x-2y &= -4 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema lineare in due incognite ($n = 2$) e tre equazioni ($m = 3$). Vediamo allora come dal suddetto sistema si passa ad un altro sistema ad esso equivalente. Si consideri la matrice completa

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix};$$

bisogna valutarne il rango, allora intanto si passa a calcolarne il determinante:

$$\mid A' \mid = 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-4) - (-12+4) + 2(-6+2) = 8 - 8 = 0.$$

D'altra arte si osserva che il minore dato dalle prime due righe e dalle prime due colonne é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0.$$

Dunque la matrica A' ha rango 2 e le righe indipendenti sono le prime due ed il sistema iniziale é equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ 3x-y &= 2 \end{cases}.$$

Ora le matrici associate al sistema sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dalle osservazioni precedenti possiamo giá dire che $\rho = rngB = 2$ e $\rho' = rngB' = 2$, dunque il sistema é compatibile ed il suo rango é 2, poiché questo é anche il numero delle incognite possiamo concludere che il sitema ammette una ed una sola soluzione. Non ci resta che calcolarla e questo puó essere fatto mediante trasformazioni elementari nella matrice B'.

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

applichiamo la trasformazione $R_2' = R_2 - 3R_1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix};$$

poi $R_1' = R_1 + \frac{1}{4}R_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix};$$

infine $R_2' = R_2/(-4)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

da cui si ricava che la soluzione é $(0, 2)$.
Il metodo utilizzato é il cosiddetto metodo di riduzione di Gauss-Jordan, che lo studente avrá giá visto nelle videolezioni. É chiaro che fin dall'inizio si sarebbero potute applicare le trasformazioni elementari alla matrice A' per ottenere la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

dalla quale si sarebbe stata ovvia la compatibilitá e la soluzione del sistema. Pertanto sostituire un sistema con un sistema ad esso equivalente non significa altro che elimenare quelle righe della matrice completa che mediante opportune trasformazioni elementari si riducono alla riga nulla. Talvolta peró puó risultare complicato effettuare direttamente le trasformazioni elementari, mentre puó risultare piú semplice calcolare i ranghi delle matrici, ecco perché si é preferito dare allo studento anche questo mezzo per la risoluzione dei sistemi lineari.

Esempio 2 Si studi il seguente sitema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z & = & 4 \\ x - y + 3z & = & 3 \\ 3x + 4z & = & 7 \end{cases} .$$

Si osserva subito che l'ultima equazione é somma delle prime due, questa dipendenza lineare si ritrova ovviamente nella matrice completa del sistema lineare, pertanto il suddetto sistema lineare puó essere sostituito dal sistema ad esso equivalente:

$$\begin{cases} 2x + y + z & = & 4 \\ x - y + 3z & = & 3 \end{cases} .$$

Le matrici associate al sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Si vede subito che il minore dato dalle prime due colonne di A é non nullo, quindi la prima matrice ha rango due e le colonne indipendenti di A sono le prime due, ma queste sono colonne anche della matrice A', quindi necessariamente anche la matrice A' ha rango due ed il sistema é compatibile. Il numero delle incognite peró é 3, allora il sistema ammette ∞^1 soluzioni, cioé é possibile assegnare un valore arbitrario ad una delle incognite dopo di che il valore delle altre due sará univocamente determinato. Si dice che le incognite che assumono un valore arbitrario fungono da parametri. Purtroppo la scelta delle incognite che fungono da parametro non é del tutto arbitraria, ed in tale scelta interviene l'individuazione delle colonne indipendenti di A. Nel nostro caso abbiamo osservato che le colonne relative alle incognite x ed y sono indipendenti, pertanto possiamo essere sicuri che la z puó fungere da parametro.

Dal sistema iniziale si passa al seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y & = & 4 - z \\ x - y & = & 3 - 3z \end{cases}$$

dove le incognite sono solo x e y, mentre la z va trattata come se fosse un numero. Non é necessario perché abbiamo giá eseguito tutti i calcoli che servivano, ma se volessimo scrivere le matrici del nuovo sistema lineare esse sono

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 - z \\ 1 & -1 & 3 - 3z \end{pmatrix} ,$$

e lo studente puó verificare facilmente che in base ai risultati teorici questo sistema ammette una ed una sola soluzione.
Passiamo a calcolarla con il metodo di Cramer: il determinante della prima matrice é

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Poniamo poi

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4-z & 1 \\ 3-3z & -1 \end{vmatrix} = -4+z-3+3z = 4z-7.$$

e

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4-z \\ 1 & 3-3z \end{vmatrix} = 6-6z-4+z = 2-5z.$$

Pertanto la soluzione dell'ultimo sistema é data da

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4z-7}{-3} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2-5z}{-3} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema iniziale é:

$$\{(\frac{7-4z}{3}, \frac{5z-2}{3}, z) \ | \ z \in \mathbf{R}\},$$

si vede quindi che le soluzioni sono infinite, ma in corrispondenza di un prefissato valore di z la soluzione é unica.

Altri esempi di sistemi lineari verranno trattati negli esercizi.

1.7 Diagonalizzazione

1.7.1 Autovalori ed autovettori

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{K}$, e sia f un endomorfismo di V, ossia un'applicazione lineare di V in sé.

Definizione 1.7.1 *Un vettore* $\mathbf{v}$ *non nullo di* V *si dice* **autovettore** *dell'endomorfismo* f *se esiste uno scalare* λ *tale che*

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

In tal caso lo scalare λ *si dice autovalore relativo all'autovettore* $\mathbf{v}$*.*

Sostanzialmente un vettore non nullo é un autovettore relativamente ad un certo endomerfismo se l'immagine é proporzionale al vettore di partenza.
Si osservi che é necessaria la richiesta $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, poiché solo per un vettore non nullo lo scalare λ risulta univocamente determinato. L'autovalore 0 é invece ammesso dalla definizione, infatti una banale conseguenza della definizione é la seguente:

Proposizione 1.7.2 *Tutti i vettori non nulli del nucleo di* f *sono autovettori relativi all'autovalore* 0*.*

Sia f un certo endomorfismo di V e λ un autovalore di f, dunque per definizione esiste un vettore non nullo $\mathbf{v}$ per cui $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Dunque l'insieme

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$$

non si riduce al solo vettore nullo.

Teorema 1.7.3 *Sia* f *un endomorfismo di* V *e* λ *un autovalore di* f*. L'insieme* V_λ *é un sottospazio di* V *detto* **autospazio di** f **relativo all'autovalore** λ*.*

Dim. Si fornisce una dimostrazione diretta, ma in seguito con una semplice osservazione si mostrerá che la dimostrazione é notevolmente semplificabile.
É chiaro che il vettore nullo appartiene a V_λ. Sia $\mathbf{v}$ un elemento non nullo di V_λ, dunque un autovettore relativo a λ, e sia α un qualsiasi scalare, allora, sfruttando anche la linearitá di f, si ha

$$f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}).$$

Pertanto anche $\alpha\mathbf{v}$ é un elemento di V_λ.
Siano ora $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ due elementi non nulli di V_λ, allora

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

Pertanto $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_\lambda$. Si puó allora concludere che V_λ é un sottospazio di V. □

Definizione 1.7.4 *Dato un autovalore λ, la dimensione dell'autospazio V_λ relativo a λ si dice* **molteplicitá geometrica** *dell'autovalore λ.*

Si ricorda che se f e g sono applicazioni lineari di V in W e se α é un qualsiasi scalare allora sono ancora lineari le applicazioni αf e $f+g$ definite da:

$$\alpha f : \mathbf{x} \in V \longrightarrow \alpha f(\mathbf{x}) \in W;$$

$$f + g : \mathbf{x} \in V \longrightarrow f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \in W.$$

Torniamo ora al nostro endomorfismo f di V e sia λ un autovalore di f. Da quanto appena osservato possiamo dire che, denotata con id l'applicazione identica di V in sé, si ha che $f - \lambda\, id$ é ancora un endomorfismo di V. Il nucleo di quest'ultima applicazione é costituito dai vettori $\mathbf{v}$ per cui

$$(f - \lambda\, id)(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

e quindi tali che

$$f(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

pertanto il nucleo di $f - \lambda\, id$ é esattamente l'autospazio relativo a λ, da questa osservazione potevamo facilmente dedurre che l'autospazio é un sottospazio di V. Si osservi inoltre che poiché per definizione di autovalore l'autospazio V_λ contiene un vettore non nullo possiamo dire che la moteplicitá geometrica di un autovalore λ é almeno 1.

Teorema 1.7.5 *Autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.*

Dim. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$ h autovettori relativi agli autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$. La tesi é banalmente vera per $h = 1$, si procede allora per induzione supponendo $h > 1$ e la tesi vera per $h - 1$. In particolare supponiamo che siano indipendenti i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{h-1}$.

Se i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{h-1}, \mathbf{v}_h$ fossero dipendenti allora esisterebbero gli scalari opportuni per scrivere

$$\mathbf{v}_h = \alpha_1 \mathbf{v}_+ \cdots + \alpha_{h-1} \mathbf{v}_{h-1}. \tag{1.3}$$

Applicandoo la f ad ambo i membri si ottiene

$$\lambda_h \mathbf{v}_h = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{h-1} \lambda_{h-1} \mathbf{v}_{h-1}. \tag{1.4}$$

D'altra parte moltiplicando nella (1.3) ambo i membri per λ_h e sottraendo poi membro a membro con la (1.4) si ottiene

$$\alpha_1(\lambda_h - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{h-1}(\lambda_h - \lambda_{h-1})\mathbf{v}_{h-1} = \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{h-1}$ sono linearmente indipendenti e per ipotesi i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}, \lambda_h$ sono tutti distinti, si ottiene

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{h-1} = 0,$$

dunque $\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$ il che contraddice il fatto che $\mathbf{v}_h$ sia un autovettore. Dunque gli auotovetori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_h$ sono linearmente indipendenti e per il principio d'induzione la tesi é vera per ogni intero h. □

Dal precedente risultato segue subito il seguente:

Corollario 1.7.6 *Se f é un endomorfismo di V e V ha dimensione n, allora f ammette al piú n autovalori distinti.*

Se é dato un certo endomorfismo f di V, di dimensione n, in una certa base $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é facile verificare se un dato vettore é o meno un autovettore; basta infatti calcolare esplicitamente $f(\mathbf{v})$ e verificare se é o meno multlipo di $\mathbf{v}$. É chiaro che questa non é la strada da seguire se si vogliono calcolare tutti gli autovettori di un certo endomorfismo. Si vedrá che esiste un metodo che permette di calcolare prima tutti gli autovalori di un endomorfismo e poi i relativi autospazi, ossia tutti gli autovettori.
Si ricorda che se $A = (a_{ij})$ é la matrice che rappresenta l'endomorfismo f nella base B, allora le equazioni matriciali che rappresentano f sono date da

$$AX = Y,$$

avendo indicato con X e Y i vettori colonna delle componenti in B rispettivamente di $\mathbf{v}$ ed $f(\mathbf{v})$. Ora dalla definizione $\mathbf{v}$, e quindi il corrispondente vettore numerico X, é un autovettore se e solo se esiste uno scalare λ tale che

$$AX = \lambda X.$$

Quest'ultima equazione matriciale, denotando con I la matrice identica d'ordine n, puó anche essere scritta nel seguente modo:

$$AX - \lambda\, IX = 0,$$

e cioé

$$(A - \lambda I)X = 0$$

In definitiva dunque gli autovettori relativi a λ sono tutti e soli i vettori le cui componenti nella base fissata risolvono il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quest'ultimo é un sistema lineare omogeneo in n equazioni ed n incognite, quindi ammette soluzione non banale se e solo se il derterminante della matrice associata é nullo; in base a questa condizione si ottiene che gli autovalori relativi ad f sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$\mid A - \lambda I \mid = 0. \tag{1.6}$$

L'equazione 1.6, detta **equazione caratteristica** di f, é di grado n a coefficienti sul campo $\mathbf{K}$, dunque un endomorfismo ammette al piú n autovalori distinti, dove n é la dimensione dello spazio vettoriale V, come era stato giá osservato nel corollario 1.7.6

Denotato con $P(\lambda)$ il primo membro della 1.6, esso viene detto **polinomio caratteristico** di f.

Si osservi che $P(0) = det\, A$, dunque 0 é autovalore di f se e solo se il determinante di A é nullo, ovvero se e solo se l'endomorfismo f non é iniettivo. Cosa del resto che giá sapevamo avendo osservato che l'autospazio relativo all'autovalore 0 é il nucleo di f.

Supponiamo ora che λ_1 sia una soluzione della 1.6, ci chiediamo come bisogma procedere per determinare l'autospazio V_{λ_1}. Basterá sostituire λ_1 a λ in $A - \lambda I$ e risolvere il sistema $(A - \lambda_1 I)X = 0$, le soluzioni di questo sistema sono tutti e soli i vettori di V_{λ_1}. In particolare se ρ é il rango della

matrice $A - \lambda_1 I$, allora la dimensione di V_{λ_1} é $n - \rho$, ossia la molteplicitá geometrica dell'autovalore λ_1 é $n - \rho$.
Poiché gli autovalori si ottengono come radici di un polinomio a coefficienti in $\mathbf{K}$, ha senso la seguente:

Definizione 1.7.7 *Se λ_1 é un autovalore di f, si dice* **molteplicitá algebrica** *di λ_1 la sua moteplicitá come radice dell'equazione carattestica $P(\lambda) = 0$ associata all'endomerfismo f.*

Vale poi il seguente teorema del quale si omette la dimostrazione.

Teorema 1.7.8 *Se λ é un autovalore dell'endomorfismo f di V tale che s é la sua molteplicitá geometrica ed m la sua molteplicitá algebrica, allora*

$$1 \leq s \leq m.$$

Chiaramente la ricerca degli autovalori di un certo endomorfismo f é un problema che dipende anche dalla natura del campo $\mathbf{K}$ sul quale si considera lo spazio vettoriale. Ad esempio se $\mathbf{K}$ é il campo $\mathbf{C}$ dei complessi allora l'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette n radici, eventualmente non tutte distinte, e quindi l'endomorfismo f ammette un certo numero di autovalori la cui somma delle molteplicitá algebriche é esattamente n. Tutto questo perché il campo $\mathbf{C}$ é algebricamente chiuso.
La situazione é ben diversa se $\mathbf{K}$ é il campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali, in tal caso l'equazione $P(\lambda) = 0$ potrebbe non avere tutte le radici reali.
In queste note siamo interessati agli spazi vettoriali sul campo reale ed in tale ambito affronteremo il problema della diagonalizzazione delle matrici quadrate.

1.7.2 Endomorfismi diagonalizzabili

Premettiamo alcune terminologie relative alle matrici quadrate.
Due matrici quadrate d'ordine n, A e B si dicono simili se e solo se esiste una matrici quadrata invertibile P tale che

$$A = P^{-1}BP.$$

É facile verificare che la relazione appena definita tra le matrici quadrate d'ordine n é una relazione d'equivalenza nell'insieme delle matrici quadrate d'ordine n.
Una matrice quadrata A d'ordine n si dice **diagonalizzabile** se é simile ad una matrice diagonale.

D'ora in poi, salvo avviso contrario, si supporrá sempre che lo spazio vettoriale V sia dato sul campo dei numeri reali.
Sia f un endomorfismo dello spazio vettoriale V, supponiamo che per un tale endomorfismo esista una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ di autovettori. Allora, detti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i relativi autovettori, la matrice che rappresenta f nella base B é

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

si tratta, cioé, di una matrice diagonale. D'altra parte per lo stesso endomorfismo f avremmo potuto scegliere una qualsiasi altra base per rappresentarlo, in tal caso si sarebbe ottenuta una matrice A in generale non diagonale, ma per le proprietá delle matrici associate ad uno stesso endomorfismo sarebbe esistita una matrice P non singolare tale che $D = P^{-1}AP$, cioé comunque la matrice A sarebbe stata equivalente ad una matrice diagonale. Ha senso quindi la seguente

Definizione 1.7.9 *Un endomorfismo f di V si dice* **diagonalizzabile** *se la matrice che lo rappresenta in una qualsiasi base é diagonalizzabile, oppure, equivalentemente, se V ammette una base di autovettori di f. Talvolta un endomorfismo diagonalizzabile viene detto* **semplice**.

A questo punto é possibile fornire un criterio per stabilire se un endomorfismo é diagonalizzabile o meno.

Proposizione 1.7.10 *Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V sul campo K é diagonalizzabile se e solo se tutti gli autovalori di f appartengono al campo K e la molteplicitá algebrica di ciascun autovalore coincide con la sua molteplicitá geometrica.*

Pertanto per studiare la diagonalizzabilitá o meno di un endomoorfismo prima di tutto bisogna calcolare i suoi valori mediante l'equazione carrateristica, ed in secondo luogo per ciascun autovalore bisogna calcolare la molteplicitá geometrica dello stesso.

Esempio 1. Sia f un endomorfismo di R^3 in sé dato da

$$f(x, y, z) = (x + 3y + z, -x + y + z, 4y + z),$$

calcolarne gli autovalori e gli autovettori.

La matrice che rappresenta f nella base canonica di R^3 é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

per calcolare gli autovalori di f si studia l'equazione caratteristica $\mid A - \lambda I \mid = 0$, cioé

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi

$$-\lambda(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Pertanto f ammette l'autovalore 0 con molteplicitá algebrica 1 e l'autovalore 2 con molteplicitá algebrica 2.
Si osservi che l'endomorfismo f non é iniettivo perché ammette 0 come autovalore e $V_0 = Kerf$. Per calcolare la dimensione di V_0 e determinarne una base basta studiare il sistema $\mid A - \lambda I \mid = 0$ con $\lambda = 0$. Dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la matrice associata a tale sistema é proprio la matrice A, la quale ha rango 2, dunque $dimV_0 = dimkerf = 1$ ed un autovettore non nullo di V_0 é $\boldsymbol{v}= (1, -1, 2)$, come il lettore puó facilmente verificare.
Per valutare la dimensione di V_2 e calcolarne una base si pone invece $\lambda = 2$ ed il sistema da studiare é:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

il rango della matrice associata al sistema é 2 e quindi la dimensione di V_2 é 1, si calcola facilmente che un vettore costituente una base di tale autospazio é $\boldsymbol{u}= (1, 0, 1)$. Ne segue che la molteplicitá geometrica dell'autovalore 2 é 1. Essendoci un autovalore per cui molteplicitá geometrica e molteplicitá algebrica non coincidono concludiamo che l'endomorfismo considerato non é diagonalizzabile.

Esempio 2. Sia $V(R)$ l'insieme delle funzioni di R in sé derivabili. É noto che $V(R)$ si struttura come spazio vettoriale sul campo dei reali con le usuali operazioni di somma tra funzioni e di moltiplicazione di uno scalare per una funzione. Tale spazio vettoriale peró non é di dimensione finita, dunque non é possibile sfruttare la corrispondenza precedentemente stabilita tra applicazioni lineari e matrici. Non é detto peró che per calcolare gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo sia necessario sfruttare le matrici. Si consideri ad esempio l'applicazione $\frac{d}{dx}$ di $V(R)$ in sé che ad ogni funzione associa la sua derivata. É chiaro che si tratta di un endomorfismo di $V(R)$, ed uno scalare λ é un autovalore se e solo se esiste una funzione non nulla e derivabile f di R in se tale che

$$\frac{df}{dx} = \lambda f,$$

si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, la quale, per $\lambda \neq 0$, ammette la funzione $f(x) = e^{\lambda x}$ come soluzione. Dunque esistono infiniti autovalori e di conseguenza infiniti autovettori indipendenti.

1.8 Esercizi

Vengono quí proposti degli esercizi di ricapitolazione degli argomenti di algebra lineare trattati, alcuni degli esercizi sono svolti, ma sarebbe opportuno che in ogni caso lo studente provi prima a risolverli da solo.

1. Verificare che l'insieme delle matrici 2×2 ad entrate reali $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ é uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ con le seguenti operazioni:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix};$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Questo esercizio puó risultare alquanto noioso, ma é sicuramente utile per ripassare gli assiomi di spazio vettoriale.
Si osservi che sono state definite delle operazioni su un insieme (che verranno comunque dette rispettivamente somma e prodotto per uno scalare) utilizzando le operazioni giá note tra i numeri reali. Per verificare che si tratta di uno spazio vettoriale bisogna verifica tutti gli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale.
Ad esempio verifichiamo che la somma é commutativa:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} =$$

per la commutativitá della somma in $\mathbf{R}$

$$= \begin{pmatrix} a'+a & b'+b \\ c'+c & d'+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Quindi la somma definita nell'insieme $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ é commutativa. Lo studente avrá cura di verificare da solo l'associativitá di questa operazione, tenendo presente che comunque andrá sfruttata la giá nota associativitá per la somma tra numeri reali.
É chiaro che l'elemento neutro per la somma appena definita é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

mentre l'opposto del generico elemento

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Restano cosí verificati i primi quattro assiomi di spazio vettoriale.
Verifichiamo solo una delle proprietá distributive, lo studente avrá cura di dimostrare l'altra:

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a & (\alpha+\beta)b \\ (\alpha+\beta)c & (\alpha+\beta)d \end{pmatrix} =$$

sfruttando la distributivitá per i numeri reali

$$= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta a & \alpha b+\beta b \\ \alpha c+\beta c & \alpha d+\beta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Che risulti $1 \cdot A = A$ per ogni matrice A é banale. Infine

$$(\alpha\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a & (\alpha\beta)b \\ (\alpha\beta)c & (\alpha\beta)d \end{pmatrix} =$$

per l'associativitá del prodotto in $\mathbf{R}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(\beta a) & \alpha(\beta b) \\ \alpha(\beta c) & \alpha(\beta d) \end{pmatrix} = \alpha(\beta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

Dunque la tesi.
Potrebbe essere utile per lo studente ripetere lo stesso esercizio per le matrici 3×3 ad entrate reali.

2. É noto che l'insieme delle matrici quadrate d'ordine due ad entrate reali costituiscono uno spazio vettoriale sui reali con le seguenti operazioni:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix};$$

$$\alpha \in \mathbf{R} \;\; \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}.$$

Qual é la sua dimensione? E quindi a quale $\mathbf{R}^n$ é isomorfo?

3. Si ricorda che una matrice quadrata si dice **diagonale** se é quadrata e gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono tutti nulli. Ad esempio sono matrici triangolari

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

In analogia all'esercizio precedente sia $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'insieme delle matrici quadrate d'ordine tre strutturato come spazio vettoriale sui reali con le solite operazioni. Provare che l'insieme

$$H = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \mid A \text{ é diagonale}\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

4. Dato lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ si consideri il seguente insieme di vettori:

$$S = \{(1,1,0,0),(2,0,2,0),(3,1,2,0),(1,0,0,1)\}.$$

a) I vettori di S sono indipendenti?
b) Qual é la dimensione del sottospazio generato da S?

5. Verificare che

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y+z=0\}$$

é un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e calcolarne la dimensione.

Svolgimento. Si consideri l'applicazione di $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}$ data da

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \longrightarrow x + y + z \in \mathbf{R};$$

si verifica facilmente che é un'applicazione lineare (verificarlo). Il nucleo di tale applicazione lineare é esattamente l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo considerato, dunque tale insieme é un sottospazio di $\mathbf{R}^4$. Per calcolare la sua dimensione consideriamo la matrice che rappresenta l'applicazione (nelle basi canoniche):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

é chiaro che tale matrice ha rango 1, dunque, dalla teoria, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo considerato é un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 3.
É esattamente quesa la strada da seguire nei due esercizi successivi.

6. Verificare che

$$H = \{(x, y, z, t, r) \in \mathbf{R}^5 \mid x - y = 0,\ z + t - r = 0\}$$

é un sottospazio di $\mathbf{R}^5$ e calcolarne la dimensione.

7. I due esercizi precedenti si generalizzano. Precisamente se S é l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite allora S é un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, e la sua dimensione é $n - p$, avendo indicato con p il rango del sistema.

8. Dati i vettori

$$A = (1, 1, 0, 0, 1),\ B = (2, 1, -1, 0, -1),\ C = (2, -3, 1, 2, 0),$$

calcolare i seguenti prodotti scalari

a) $A \cdot B$;
b) $B \cdot C$;
c) $A \cdot C$;
d) $A \cdot (B + C)$;
e) $(A - B) \cdot C$.

9. Si consideri l'usuale prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$. Provare che se A é un vettore non nullo e $A \cdot B = A \cdot C$ allora $B = C$.

10. Se
$$A = (1, 2, 3, 4, 5) \text{ e } B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}),$$
determinare due vettori C e D di $\mathbf{R}^5$ tali che siano verificate le seguenti condizioni:

a) $B = C + 2D$;
b) $D \cdot A = 0$;
c) C é parallelo ad A.

11. Determinare tutti i vettori di $\mathbf{R}^2$ ortogonali ad A ed aventi la stessa lunghezza di A nel caso in cui $A = (1, 2)$ e poi nel caso in cui $A = (1, -2)$.

12. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:
$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 2), \ \ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, 1),$$
$$\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1, 0), \ \ \mathbf{v}_4 = (3, 0, 1, 3).$$
Esibire una base del sottospazio vettoriale
$$H = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4),$$
e completare una tale base in una base di tutto $\mathbf{R}^4$.

13. Dati i vettori
$$A = (1, 1, 0, 1, 1), \ B = (1, 0, 2, 1, -1), \ C = (1, 1, -1, -1, 1)$$
di $\mathbf{R}^5$ verificare che sono indipendenti. Completare il sistema indipendente $\{A, B, C\}$ in una base di $\mathbf{R}^5$. **Svolgimento.** Per verificare che sono indipendenti scriviamo i vettori come righe di una matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Se prendiamo in considerazione il minore dato dalle prime tre colonne otteniamo
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

sviluppando rispetto alla seconda riga

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Dunque la matrice ha rango 3, pertanto le sue righe, cioé i vettori A, B e C, sono linearmente indipendenti.
Sapendo che $\mathbf{R}^5$ ha dimensione 5, per completare il sistema $\{A, B, C\}$ in una base di $\mathbf{R}^5$ bisogneriá trovare due vettori E ed F di modo che $\{A, B, C, E, F\}$ sia un sistema linearmente indipendente. É chiaro che le scelte possibili per E ed F sono infinite, ma con la teoria delle matrici possiamo effettuare una scelta particolarmente comoda. Tenendo presente che nella matrice M le prime tre colonne sono indipendenti, aggiungiamo ad M due righe nel seguente modo:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ora andiamo a sviluppare il determinante di M' con la regola di Laplace applicata all'ultima riga e poi alla quarta riga otteniamo

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

dunque il rango di M' é 5, cioé le righe, e quindi i cinque vettori scelti, sono indipendenti.

14. Si verifichi che i vettori di $\mathbf{R}^4$

$$A = (1, 1, -1, 0),\ B = (0, 1, 1, 0),\ C = (0, 1, 1, 1)$$

sono indipendenti e si completi il sistema in una base di $\mathbf{R}^4$.

MEMO: bisogna aggiungere degli esercizi per i seguenti argomenti
1. Calcolo del rango e della nullitá di un'applicazione lineare mediante la matrice che la rappresenta.
2. Sistemi lineari con parametro.
3. Esercizi sugli autovalori ed autovettori.

1.9 Geometria analitica nel piano e nello spazio

1.9.1 Vettori nel piano e nello spazio. La retta nel piano

Per quanto riguarda tali argomenti, lo studente puo' far riferimento alle lezioni 21 - 22 - 23 - 24 contenute nelle videocassette del corso di matematica II (Prof. P. Valabrega e N. Chiarli).

1.9.2 La Circonferenza. Fasci di Circonferenze.

Riguardo la definizione e le proprieta' della circonferenza e dei fasci di circonferenze rimandiamo alle lezioni 25 e 26 delle videocassette del corso di matematica II (Prof. P. Valabrega e N. Chiarli).

In questa sezione mostreremo attraverso alcuni esempi come determinare:

- *l'equazione della circonferenza passante per tre punti non allineati.*
- *le equazioni delle rette tangenti ad una circonferenza condotte da un punto ad essa esterno.*

Osserviamo che nel paragrafo 2.3 della sezione riguardante le coniche nel piano reale daremo un metodo generale per calcolare la retta tangente ad una conica non degenere in un suo punto che puo' utilizzarsi quindi anche per la circonferenza. Per questo motivo non tratteremo tale argomento in questa sezione.

Equazione della circonferenza passante per tre punti

Assegnati tre punti non allineati A, B e C per essi passa una ed una sola circonferenza il cui centro O è il punto di intersezione degli assi [1] *dei due segmenti AB e BC* [2] *ed il cui raggio è OA.*

Poichè in tale costruzione intervengono intersezioni tra rette e questioni di perpendicolaritá , gli argomenti studiati nella sezione precedente ci forniscono tutti gli strumenti per determinare l'equazione della circonferenza passante richiesta. Vediamo come, attraverso il seguente

[1] Ricordiamo che l'asse di un segmento AB la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB.

[2] Oppure dei due segmenti AB e AC oppure dei due segmenti AC e BC.

Esempio. *Determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti* $A(-2,2)$, $B(10,4)$ *e* $C(3,-3)$.

Lasciamo allo studente il compito di verificare che i tre punti assegnati non sono allineati. [3] Il punto medio di AB e' $M_{AB}(4,3)$ ed il punto medio di BC e' $M_{BC}(13/2,1/2)$. L'asse di AB è la retta passante per M_{AB} e perpendicolare ad AB (ossia perpendicolare al vettore $(12,2)$), quindi :$\mathbf{12}(x-4)+\mathbf{2}(y-3)=0$, cioe' $6x+y-27=0$.
L'asse di BC è la retta passante per M_{BC} e perpendicolare a BC (ossia perpendicolare al vettore $(\mathbf{1},\mathbf{1})(=1/7(-7,-7))$, quindi $(x-13/2)+(y-1/2)=0$, cioe' $x+y-7=0$.

Il centro della circonferenza è il punto le cui coordinate sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 6x & +y & -27 & =0 \\ x & +y & -7 & =0 \end{cases},$$

e cioè $O(4,3)(=M_{AB})$. Il raggio è $r=|OA|=\sqrt{37}$. Pertanto l'equazione della circonferenza è $(x-4)^2+(y-3)^2=(\sqrt{37})^2$, ossia $x^2+y^2-8x-6y-12=0$.

Equazioni delle rette tangenti ad una circonferenza condotte da un punto ad esse esterne.

Ricordiamo che un punto si dice **esterno** ad una circonferenza se la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio della circonferenza. E' noto che per un punto P esterno ad una circonferenza passano due rette tangenti alla circonferenza. Vediamo come si ottengono.

Sia Γ una circonferenza di centro $C(m,n)$ e raggio r e sia $P(x_0,y_0)$ un punto ad essa esterno. Le due rette passanti per P e tangenti a Γ sono le due rette del fascio di rette di centro $P: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ che hanno distanza dal centro della circonferenza uguale al raggio di quest'ultima, e cioè si ottengono imponendo che sia soddisfatta la condizione:

$$\frac{|a(m-x_0)+b(n-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r. \tag{1.7}$$

Risolvendo quest'ultima equazione in a e b si ottengono i valori richiesti.

Nota

[3] Un modo e' determinare la retta passante per A e B e verificare che C non appartiene a tale retta. (Oppure con il determinante dei vettori AB, AC.)

Osserviamo che nella 1.7 è $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Infatti se fosse $a = 0$ (oppure $b = 0$) allora sostituendo tale valore di a nell'equazione del fascio di rette per P esso si ridurrebbe alla retta di equazione $x = x_0$, il che è impossibile! Dal fatto che $a \neq 0$ e $b \neq 0$ segue che nei calcoli per semplificare è lecito dividere per a oppure b.

Esempio *Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza d'equazione* $x^2 + y^2 = 25$ *condotte dal punto* $P(25/3, 0)$.
Lasciamo allo studente il compito di verificare che il punto P e' esterno alla circonferenza. Tale circonferenza ha centro $C(0, 0)$ e raggio $r = 5$. Le due rette tangenti appartengono al fascio $a(x - 25/3) + by = 0$.
Lequazione 1.7 in questo caso diventa $\dfrac{|a(0 - 25/3) + b(0 - 0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5$, da cui $\dfrac{25}{3}a = 5\sqrt{a^2 + b^2}$ e quindi $16a^2 = 9b^2$, da cui $a = \pm 3/4b$. Ponendo $b = 4$ si ha $a = \pm 3$ e le rette richieste sono:

$$3x + 4y - 25 = 0 \ \text{ e } \ 3x - 4y - 25 = 0.$$

1.9.3 Le coniche nel piano cartesiano reale

Le lezioni 26 e 27 del corso di Matematica II (Prof. P. Valabrega - N. Chiarli) trattano lo studio delle coniche (non degeneri) nel piano cartesiano reale quando e' nota la loro equazione in forma canonica. Se l'equazione della conica e' in forma non canonica allora trattano solo il caso in cui nell' equazione manca il termine xy e fanno vedere, attraverso alcuni esempi, come a partire da tale equazione si arriva alla forma canonica.

In questa sezione presenteremo un metodo per arrivare a tale forma canonica nel caso generale, utilizzando la teoria della diagonalizzazione[1] delle matrici simmetriche. Inoltre presenteremo un metodo per riconoscere la degenerita' di una conica e mostreremo come si calcola (con *la regola dello sdoppiamento*) l'equazione della retta tangente ad una conica (non degenere) in un suo punto senza passare per la forma canonica.

Tratteremo i seguenti argomenti:

[1] Presentando cosi' un'altra situazione in cui la teoria della diagonalizzazione si rivela utile.

1. *Matrice di una conica.*
2. *Coniche degeneri e non degeneri. Componenti di una conica degenere.*
3. *Equazione della tangente ad una conica (non degenere) in un suo punto.*
4. *Ellissi, iperboli e parabole: Equazioni canoniche.*

1) **Matrice di una conica**

Per definizione una **conica** e' il luogo dei punti del piano cartesiano le cui coordinate, in un riferimento del piano, sono le soluzioni reali di un'equazione di secondo grado in x ed y, non identica, cioe' del tipo: $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{bxy} + \mathbf{c}y^2 + \mathbf{dx} + \mathbf{ey} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$**, con (a, b, c)**$\neq$ **(0, 0, 0).**

Quindi le circonferenze sono esempi di coniche.

Osservazione 1

Spesse volte, con evidente abuso di linguaggio, anzichè dire la conica di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ diremo la conica $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Definizione Sia Γ una conica di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, diremo **matrice** di Γ la seguente matrice simmetrica d'ordine tre:

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}.$$

2 Coniche degeneri e non degeneri. Componenti di una conica degenere

Una conica si dice **degenere** se la sua equazione si scompone nel prodotto di due equazioni di primo grado in x ed y, ossia se e' l'unione di due rette (dette *componenti* della conica). In caso contrario la conica dicesi non degenere.
La seguente proposizione, di cui non diamo la dimostrazione, fornisce un criterio algebrico per riconoscere la degenerita' o meno di una conica.

Proposizione 1.1 *Una conica Γ e' degenere se e solo se det $A = 0$.*
Pertanto e' non degenere se e solo se det A $\neq 0$.

Classificazione delle coniche (non immaginarie)

CONICHE DEGENERI (det A = 0)

CONICHE NON DEGENERI (det A≠0)

Ellissi se $\lambda_1\lambda_2 > 0$
Parabole se $\lambda_1\lambda_2 = 0$
Iperboli se $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

ove λ_1 e λ_2 sono i due autovalori di A_{33}.

Nota *Osserviamo che le circonferenze rientrano nella classe delle ellissi.*

Nel caso in cui una conica è degenere occorre determinare le equazioni delle due rette in cui essa si "spezza". Per fare cio' occorre scomporre il polinomio che fornisce l'equazione della conica ," pensandolo" come trinomio di secondo grado in x (oppure in y).

Esercizio 1 *Provare che le seguenti coniche sono degeneri e determinare le rette che le compongono:*
a) x^2- y^2 = 0; b) x^2 -2xy - y^2 = 0; c) x^2 - xy - 6y^2 +3x +11y - 4 = 0.

Lasciamo allo studente il compito di verificare che le tre coniche assegnate sono degeneri. Passiamo a determinare le rette che le compongono.

a) Poiche' l'equazione della conica puo' scriversi nella forma $(x+y)(x-y) = 0$ ne segue che la conica data e' unione delle due rette $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

b) In questo caso l'equazione della conica puó scriversi $(x - y)^2$= 0, e quindi la conica si riduce alla retta $x - y = 0$, contata due volte.

c) In questo caso non e' immediato determinare i due fattori di primo grado il cui prodotto fornisce l'equazione della conica assegnata. Risolviamo allora l'equazione $x^2 - xy - 6y^2 + 3x + 11y - 4 = 0$ rispetto alla x, dopo averla posta nella forma: $x^2 - (y-3)x - 6y^2 + 11y - 4 = 0$.

Quindi $x = \frac{y-3 \pm \sqrt{y^2-6y+9+24y^2-44y+16}}{2} = \frac{y-3\pm 5(y-1)}{2}$.

Le due rette richieste sono:

$$2x = y - 3 - 5(y-1) \text{ e } 2x = y - 3 + 5(y-1)$$

cioè

$$x + 2y - 1 = 0 \text{ e } x - 3y + 4 = 0.$$

Esercizio 2 *Per quali valori di k l'equazione $2kx^2$ - $4xy$ +$(2k$ - $3)y^2$ -1 = 0 rappresenta una conica degenere?*

Si tratta di vedere per quali valori di k il determinante della matrice della conica assegnata si annulla. La matrice della conica assegnata è :

$$A = \begin{pmatrix} 2k & -2 & 0 \\ -2 & 2k-3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi det A = -$4k^2$ +6k+4. La conica e' degenere se detA = 0, ossia se -$4k^2$ +6k+4 = 0. Tale equazione ha due soluzioni k = $-1/2$ e k = 2. Pertanto per k = $-1/2$ e k = 2 l'equazione assegnata rappresenta una conica degenere. Per ogni k$\neq -1/2$ e 2 rappresenta una conica non degenere. Lasciamo allo studente il compito di determinare le componenti delle due coniche degeneri che si ottengono dall'equazione assegnata sostituendo i valori k = $-1/2$ e 2. (*Osserviamo che per $k = -1/2$ non otteniamo una conica).*

In questo numero abbiamo completato lo studio delle coniche degeneri, in quanto siamo in grado di determinare la loro struttura, ossia sappiamo dire come e' fatta una conica degenere. Pertanto d'ora in poi considereremo solo coniche non degeneri.

3) Equazione della tangente ad una conica (non degenere) in un suo punto.

Sia $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ una conica non degenere (cioè $detA \neq 0$) e sia P(x_0,y_0) un punto di tale conica. Allora per P passa una ed una sola retta tangente alla conica e la sua equazione è :

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) = 0$$

ove F_x e F_y denotano le derivate parziali prime della F. Tenendo conto che $F(x_0, y_0) = 0$ l'equazione della retta tangente alla conica data nel punto $P(x_0, y_0)$ si puó scrivere come:

$$axx_0 + \frac{b}{2}(x_0x + y_0y) + cyy_0 + \frac{d}{2}(x + x_0) + \frac{e}{2}(y + y_0) + f = 0.$$

Pertanto tale equazione si ottiene da quella della conica con la cosidetta regola dello sdoppiamento.

4) Equazioni canoniche delle coniche non degeneri

Sia Γ una conica non degenere che, in un fissato riferimento, è rappresentata dall'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. In questo numero applicheremo il teorema enunciato nella lezione 26 delle videocassette del corso di Matematica II (Prof. P. Valabrega - Prof. N. Chiarli). Tale teorema afferma che esiste un riferimento del piano in cui l' equazione di una conica non degenere si puo' scrivere in una delle due forme (ciascuna di esse è detta equazione canonica della conica):

a) $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \gamma = 0$

   con λ_1 e λ_2 autovalori della seguente sottomatrice di A:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

   e $\gamma = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} \neq 0$, ove (x_0, y_0) è la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

b) $\lambda Y^2 = -2a_{13}X$ oppure $\lambda X^2 = -2a_{23}Y$

Esempio. *Provare che l'equazione x^2 - xy + y^2 + x -6 = 0 rappresenta una conica non degenere. Dire di che tipo di conica si tratta e determinare la sua equazione canonica.*

La matrice della conica assegnata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \text{-}1/2 & 1/2 \\ \text{-}1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è diverso da zero. Pertanto è una conica non degenere. Determiniamo la sua equazione canonica.

La matrice $A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & \text{-}1/2 \\ \text{-}1/2 & 1 \end{pmatrix}$.
ha come autovalori : $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = 1/2$, pertanto si tratta di un'ellisse e la sua equazione canonica è :

$$3/2x^2 + 1/2y^2 - 19/3 = 0.$$

Per gli argomenti che andremo ora ad esporre si possono consultare le lezioni dalla 29 alla 35 contenute nelle videocassette del corso di Matematica II (Prof. P. Valabrega - Prof. N. Chiarli).

Rette e piani nello spazio

- Fasci propri e impropri di piani
Siano π e π' sono due piani di equazioni:

$$\begin{aligned} \pi : ax + by + cz + d &= 0 \\ \pi' : a'x + b'y + c'z + d' &= 0. \end{aligned}$$

Se π e π' sono paralleli allora se consideriamo la totalitá dei piani di equazione:

$$ax + by + cz + k = 0, \tag{1.8}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$ otteniamo tutti e soli i piani paralleli a π, ovvero ció che si chiama il **fascio improprio di piani** la cui equazione è data dalla (1.8). Se π e π' hanno una retta r in comune allora se consideriamo la totalitá dei piani passanti per la retta r otteniamo un **fascio proprio di piani** la cui equazione è data da:

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d')$$

al variare di λ e μ in $\mathbf{R}$.

-Stelle proprie e improprie di rette
Data una retta r di equazione:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0. \end{cases}$$

la totalitá delle rette dello spazio parallele a r è detta **stella impropria di rette** di direzione individuata da r e si puó rappresentare con il sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + h &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + h' &= 0. \end{cases}$$

al variare di $h, h' \in \mathbf{R}$.
Una retta r puó essere determinata assegnando un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed un vettore $\underline{u} = (l, m, n)$ parallelo ad r. Ne segue che un punto $P(x, y, z)$

appartiene alla retta r se e soltanto se il vettore $P - P_0$ è parallelo al vettore $\underline{u}$. Ne segue che deve essere $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ parallelo ad (l, m, n) ossia esiste un numero reale t tale che $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(l, m, n)$. Al variare di $t \in \mathbf{R}$ otteniamo quindi le equazioni parametriche della retta r:

$$r : \begin{cases} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt. \end{cases}$$

Da ció si puó ricavare

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{1.9}$$

(se uno tra l, m, n è uguale a zero allora è possibile avere r solo in forma parametrica o come intersezione di due piani).
La (1.9) è detta equazione della retta r in **forma di rapporti uguali**.
La totalitá delle rette passanti per un punto P_0 è detta **stella propria di rette** di centro P_0 e si ottiene dalla (1.9) al variare di $(l, m, n) \in \mathbf{R^3}$.

-Posizione reciproca di due rette
Due rette distinte r ed r' nello spazio possono essere **sghembe**, cioè non contenute in uno stesso piano, oppure **complanari**. In quest'ultimo caso si suddividono ulteriormente in **parallele**, ossia prive di punti comuni o **incidenti**, ossia con un punto in comune.
Se r ed r' hanno parametri direttori rispettivamente (l, m, n) ed (l', m', n') allora la condizione di parallelismo di due rette è espressa dall'esistenza di un numero reale $\rho \neq 0$ tale che:

$$(l', m', n') = \rho(l, m, n).$$

Supposto quindi che r ed r' non siano parallele, per verificare se esse sono incidenti o sghembe si puó controllare se il sistema costituito dalle loro equazioni è compatibile o meno. Si puó procedere anche in modo diverso. Siano $P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$ e $P_1(x_1, y_1, z_1) \in r'$ due punti e siano $\underline{u}$ ed $\underline{u'}$ due vettori paralleli rispettivamente ad r e ad r'. Allora r ed r' sono complanari se e solo se lo sono i vettori $P_1 - P_0, \underline{u}, \underline{u'}$ ossia se $(P_1 - P_0) \cdot \underline{u} \wedge \underline{u'} = 0$ o equivalentemente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

Ne segue che se nella (1.10) il determinante risulta diverso da zero, ovviamente r ed r' sono sghembe.

-Distanza di un punto da una retta
Sia r una retta e sia P_0 un punto fuori di essa, per calcolare la distanza di P_0 dalla retta r, $d(P_0, r)$, basta calcolare la distanza di P_0 dal punto di incontro H di r con il piano per P_0 perpendicolare ad r.

-Distanza tra due rette Se r ed r' sono due rette distinte allora per distanza di r da r' si intende la minima distanza tra le due rette e si denota con $d(r, r')$.
Se r ed r' sono incidenti allora, ovviamente $d(r, r') = 0$.
Se r ed r' sono parallele allora $d(r, r') = d(P, r')$, essendo P un qualsiasi punto sulla retta r.
Se infine r ed r' sono sghembe allora esistono due punti P e P' rispettivamente su r ed r' tali che la retta per P e P' è ortogonale sia ad r che ad r'. Allora $d(r, r') = \overline{PP'}$. Un altro modo di procedere è il seguente: sia π il piano per r' parallelo ad r allora detto P un qualsiasi punto di r, $d(r, r') = d(P, \pi)$.

-Piano tangente ad una superficie
Sia S una superficie dello spazio e sia P_0 un suo punto. Se in P_0 esiste il piano tangente ad S, sia π_0, esso contiene tutte le rette tangenti S in P_0. Se S ha equazione cartesiana del tipo

$$S : f(x, y, z) = 0$$

allora il piano tangente in $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ha equazione:

$$\pi_{P_0} : f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

ove f_x, f_y, f_z denotano le derivate parziali prime della f.