0.1 SOTTOSPAZI VETTORIALI

Supponiamo che (V,$\oplus, \circ, R$) sia uno spazio vettoriale reale.

Definition 1 *Un sottoinsieme $\emptyset \neq$ H$\subseteq$ V si dice* sottospazio vettoriale *se (H,$\oplus, \circ, R$) è esso stesso uno spazio vettoriale.*

La seguente proposizione afferma che per provare che un sottoinsieme non vuoto è un sottospazio vettoriale è sufficiente dimostrare la stabilità rispetto alle due operazioni

Proposition 1 *Sia H un sottoinsieme non vuoto di V, allora $\emptyset$ $\neq$H$\subseteq$V è un sottospazio vettoriale*$\iff \begin{cases} a)\ v \oplus w \in H\ \forall\ (v, w) \in H \\ b)\ \alpha \circ v\ \in H\ \forall\ (\alpha,w) \in RxH \end{cases}$

Example 1 *Sappiamo che l'insieme R^3 rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione esterna è uno spazio vettoriale. Consideriamo il sottoinsieme H=$\{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$, ovviamente in H non ci saranno tutte le terne di numeri reali, ad esempio la terna (1,1,1) non appartiene ad H in quanto non verifica la relazione, H è una parte priopria di R^3. Verifichiamo che H è un sottospazio vettoriale di R^3. Intanto H è non vuoto perche la terna (0,0,0) vi appartiene. Verifichiamo la stabilità rispetto alle due operazioni. Supponiamo per ipotesi che $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ appartengono ad H ed $\alpha \in R$, dobbiamo provare che $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in H$ e $\alpha \circ u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in H$*

$u \in H \Longrightarrow x_1 + y_1 - z_1 = 0$
$v \in H \Longrightarrow x_2 + y_2 - z_2 = 0$
Calcoliamo le seguenti quantità:
(*) $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0$
(**) $\alpha x_1 + \alpha y_1 - \alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 - z_1) = \alpha 0 = 0.$
La relazione (*) ci dice che la somma di due vettori di H verifica la relazione di H e quindi appartiene ad H.

La relazione (**) invece dimostra la stabilità ripetto al prodotto esterno.

Questa è la strada da adottare quando si vuole provare che un sottoinsieme H dello spazio vettoriale numerico R^n è un sottospazio vettoriale.

Remark 1 *Supponiamo che H non sia vuoto e che esso sia un sottospazio vettoriale di un certo spazio vettoriale V. Se H è non vuoto vuol dire che c'è almeno un vettore v$\in$ H e poichè esso è un sottospazio vuol dire che ci deve essere il vettore -v, la stabilità di H rispetto alla operazione di addizione tra vettori ci porta a concludere che in H ci sta il vettore $0 = v \oplus (-v)$. Concludiamo che un sottoinsieme H per essere un sottospazio deve essere non vuoto e deve contenere necessariamente il vettore nullo dello spazio vettoriale V. Attenzione perchè se il vettore nullo sta in H non è detto che esso sia un sottospazio vettoriale. La non esistenza del vettore nullo ci garantisce che H non è un sottospazio, per contro se esiste non è detto che H sia un sottospazio vettoriale. Gli esempi seguenti chiariscono bene quanto detto.*

Exercise 1 *Dire quali dei seguenti sottoinsiemi H_i di R^3 sono sottospazi vettoriali*

$H_1 = \{(x,y,z)|\ x^2 + y \geq 0\}$, $H_2 = \{(x,y,z)|\ x+1 = y\}$, $H_3 = \{(x,y,z)|\ x-y = 0$ e $x+2y = 0\}$

Suggerimento. Ci viene chiesto di verificare se H_1 è un sottospazio vettoriale. Il vettore nullo appartiene ad H_1, al momento non possiamo concludere dobbiamo indagare ulteriormente. Verifichiamo che non vale la stabilità rispetto all'addizione. I vettori u=(-1,-1,2) e v=(1,-1,2) appartengono entrambi ad H_1 perchè $(-1)^2 - 1 \geq 0$ e $(1)^2 - 1 \geq 0$, però u+v=(0,-2,4)$\notin H_1$ perchè $(0)^2 - 2 \prec 0$, concludiamo che H_1 non è un sottospazio vettoriale. Ci viene chiesto di verificare se H_2 è un sottospazio vettoriale. Osserviamo che il vettore nullo non appartiene ad H_2, concludiamo che H_2 non è un sottospazio vettoriale. Ci viene chiesto di verificare se H_3 è un sottospazio vettoriale. Il vettore nullo appartiene ad H_3, al momento non possiamo concludere, dobbiamo indagare ulteriormente. Verifichiamo la stabilità rispetto alle due operazioni. Supponiamo per ipotesi che $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ appartengono ad H_3 ed $\alpha \in R$, dobbiamo provare che $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in H_3$ e $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in H_3$.

$u \in H_3 \Longrightarrow x_1 - y_1 = 0$ e $x_1 + 2y_1 = 0$

$v \in H_3 \Longrightarrow x_2 - y_2 = 0$ e $x_2 + 2y_2 = 0$

Calcoliamo le seguenti quantità:

Stabilità rispetto alla somma $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2, -y_2) = 0 + 0 = 0$; $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2) = 0 + 0 = 0$;

Stabilità rispetto al prodotto $(\alpha x_1 - \alpha y_1) = \alpha(\mathrm{x}_1 - y_1) = \alpha 0 = 0$; $\alpha x_1 + 2\alpha y_1 = \alpha(\mathrm{x}_1 + 2y_1) = \alpha 0 = 0$

La stabilità rispetto alle due operazione è provata e possiamo concludere che H_3 è un sottospazio vettoriale di R^3. Da quanto detto abbiamo intuito che quando il vettore nullo non vi appartiene H non è un sottospazio vettoriale

Le due proprietà che dobbiamo verificare vere affinchè un sottoinsieme sia un sottospazio vettoriale sono indipendenti, nel senso che si possono presentare tutte e quattro le eventualità.

Example 2 *Consideriamo lo spazio vettoriale (R^3,$\oplus, \circ, R$) e consideriamo i seguenti sottoinsiemi di R^3. Facciamo notare che tutti i sottoinsiemi che consideriamo in questo esempio contengono il vettore nullo*

$$(1^0 \text{ caso}) \longrightarrow H_1 = \{(x,y,z)|\ z = 1\} \cup \{(0,0,0)\}$$

La condizione a) non è verificata: $(x_1, y_1, 1) \oplus (x_2, y_2, 1) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 2) \notin H_1$

La condizione b) non è verificata: $2 \circ (x_1, y_1, 1) = (2x_1, 2y_1, 2) \notin H_1$

H_1 non è un sottospazio vettoriale.

$$(2^0 \text{ caso}) \longrightarrow H_2 = \{(x,y,z)|\ \text{x, y e z} \in Q\}$$

La condizione a) è verificata: $(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, z_1 + z_2) \in H_2$

La condizione b) non è verificata: $\sqrt{2} \circ (1,2,1) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin H_2$

H_2 non è un sottospazio vettoriale.

$$(3^0 \text{ caso}) \longrightarrow H_3 = \{(a,b,c) \mid a \neq 0\ \} \cup \{(0,0,0)\}$$

La condizione a) non è verificata: $(-1,1,1) \oplus (1,2,-1) = (0,3,0) \notin H_3$

La condizione b) è verificata: $\alpha \circ (a,b,c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c) \in H_3$

H_3 non è un sottospazio vettoriale.

$$(4^0 \text{ caso}) \longrightarrow H_4 = \{(x,y,z)|\ \text{x+y=0}\}$$

La condizione a) è verificata: $(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, z_1 + z_2) \in H_4$

La condizione b) è verificata: $\alpha \circ (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in H_4$

H_4 è un sottospazio vettoriale.

Exercise 2 *Dire quali dei seguenti sottoinsiemi H di R^3 sono sottospazi vettoriali:*

$H = \{(x,y,z)|\ \text{xy} \geq 0\}$,

$H = \{(x,y,z,t)|\ \text{(x-y)(z-t)=0}\}$

$H = \{(x,y,z)|\text{x=y=z}\}$

$H = \{(x,y,z)|\text{x+y=1}\}$

$H = \{(x,y,z)|\text{x-y=0}\} - \{(2,2,0)\}$

$H=\{(x,y,z)|$x+y=0 e x-y=0$\}$
$H=\{(x,y,z)|$ 0x+0y+0z=0$\}$
$H=\{(x,y,z)|$ x+y-z=0, x+y=0, x-y=0$\}$