Exercise 1 *Assegnata la seguente coppia di sistemi (H,K) di* R^3 :

$$(*) \qquad H = \{(1,-1,0),(1,0,1),(2,-1,1)\} \text{ e } K = \{(1,1,1)\}$$

(a) Determinare L(H), L(K), L(H)∩L(K) e L(H)+L(K)

Soluzione (*) Prima di determinare L(H) osserviamo se il sistema è libero o legato.

Diciamo che questa operazione di "pulitura" ci risparmia di coinvolgere nelle combinazioni lineari vettori che dipendono dai restanti. Quando ci siamo ricondotti ad un sistema indipendente saremo anche in grado di pronunciarci sulla dimensione dello spazio generato ed esibire una base.

Il terzo vettore è somma dei primi due, possiamo eliminarlo e otteniamo il seguente sistema: $\widehat{H} = \{(1,-1,0),(1,0,1)\}$. Tale sistema è ora libero perchè i due vettori non sono proporzionali e quindi indipendenti. Osserviamo che essi costituiscono una base dello spazio generato che avrà dmensione 2.

L(H)=L($\widehat{H}$) $= \{\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,1) \mid \alpha,\beta \in R\} = \{(\alpha+\beta,-\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in R\} =$
$=\{(x,y,z) \mid \alpha+\beta = x,\ -\alpha = y, \beta = z\} =$ eliminando i parametri=
$\{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$.

L'ultima relazione si dice anche una rappresentazione cartesiana dello spazio generato da H, osservate che ogni vettore che sta in L(H) deve verificare quella relazione e infatti vettori di partenza soddisfano tale equazione.

Passiamo a K, osserviamo che K è un sistema indipendente. Quindi K è anche una base e L(K) avrà dimensione 1. L(K)= $\{\alpha(1,1,1) \mid \alpha \in R\} = \{(\alpha,\alpha,\alpha) \mid \alpha, \in R\}$=$\{(x,y,z) \mid \alpha = x,\ \alpha = y, \alpha = z\}$ = eliminando i parametri=$\{(x,y,z) \mid x-y=0$ e $x-z=0\}$. Lo spazio intersezione sarà costituito dalle terne che stanno in L(H) e L(K). Ora per trovare lo spazio intersezione è sufficiente risolvere il sistema costituito dalle tre equazioni

L(H)∩L(K)=$\{(x,y,z) \mid x+y-z=0$, x-y=0 e x-z=0$\}$ =risolvendo il sistema=$\{(0,0,0)\}$.

Come si fa a trovare lo spazio somma L(H)+L(K)?

Fate in questo modo, unite i due sistemi e poi lo "ripulite" riconducendovi ad un sistema indipendente e poi fate lo spazio generato. In altre parole L(H)+L(K) è lo spazio generato dal sistema $\widehat{H} \cup K = \{(1,-1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$. Poichè l'ultimo sistema è costituito da 3 vettori indipendenti esso genererà un sottospazio di dimensione 3, ma l'unico sottospazio di dimensione 3 sappiamo essere R^3 e quindi L(H)+L(K)=R^3.

Indirettamente tale risultato lo si poteva ottenere anche dalla relazione di Grassmann:
dim(L(H)+L(K))=dim(L(H))+dim(L(K))-dim(L(H)∩L(K))=2+1-0=3

Exercise 2 *Assegnati i seguenti sottoinsiemi H e K di* R^4*:*

$$H = \{(x,y,z,t) | \text{ 2x+y=0 e z+t=0}\}$$

$$K = \{(x,y,z,t) | \text{ z-t=0}\}$$

(a) Determinare una base e la dimensione di H, K, H∩K e H+K.

Soluzione Per determinare una base e la dimensione di H è sufficiente risolvere il sistema costituito dalle due equazioni:

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases}$ da cui y=-2x e z=-t. Osserviamo che x e t sono le variabili libere.

Gli elementi di H sono le quaterne del tipo (x,-2x,-t,t), quindi possiamo dire che

$$H = \{(x,-2x,-t,t) | \text{ x,t} \in R\} = \{(x,-2x,0,0)+(0,0,-t,t) | \text{ x,t} \in R\} =$$

$= \{x(1,-2,0,0)+t(0,0,-1,1)|$ x,t $\in R\}$

L'ultima relazione non altro afferma che H è il sottospazio generato dal sistema A=$\{(1,-2,0,0),(0,0,-1,1)\}$. Quindi A è una base di H e la sua dimensione è 2.

Si fa allo stesso modo per K, in questo caso dobbiamo risolvere un sistema costituito da una sola equazione e quindi z=t, abbiamo tre variabili libere x,y e t.

Gli elementi di K sono le quaterne del tipo (x,y,t,t), quindi possiamo dire che

$$K = \{(x,y,t,t)| \text{ x,y e t} \in R\} = \{(x,0,0,0)+(0,y,0,0)+(0,0,t,t)| \text{ x,y e t} \in R\} =$$

$$= \{x(1,0,0,0)+y(0,1,0,0)+t(0,0,1,1)| \text{ x,y e t} \in R\}$$

L'ultima relazione non altro afferma che K è il sottospazio generato dal sistema B=$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$. Quindi B è una base di K e la sua dimensione è 3.

Per determinare $H \cap K$ è sufficiente risolvere il sistema costituito dalle equazioni che definiscono H e K:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ z+t=0 \\ z-t=0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette come soluzioni y=-2x, z=0 e t=0 Osserviamo che x è la variabile libera. Quindi $H \cap K = \{(x,-2x,0,0)| \text{ x} \in R\} =$

$= \{x(1,-2,0,0)|x \in R\}$. L'ultima espressione afferma che H$\cap K$ è il sottospazio generato dal sistema S=$\{(1,-2,0,0)\}$ e quindi $H \cap K$ ha dimensione 1 e una sua base è S.

Vediamo di dedurre qualcosa su H+K dalla formula di Grassmann:

dim(H+K)=dimH+dimK-dim(H)$\cap$K)=2+3-1=4, se dim(H+K)=4 vuol dire che H+K=R^4 e una sua base è un qualsiasi sistema costituito da 4 vettori indipendenti, ad esempio la base canonica di R^4.