Compito di Matematica II - Consorzio Nettuno - 24/1/2000

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R^4}$ siano dati i vettori:

$$v_1 = (0, 1, 0, 0), v_2 = (0, 2, 0, 2), v_3 = (0, 0, 0, 5)$$

i) Si determini la dimensione del sottospazio $W = [v_1, v_2, v_3]$ e una sua base B. Si determini inoltre una base B' di $\mathbf{R^4}$ tale che $B \subseteq B'$.

ii) Si dica quali tra i vettori $w_1 = (1, 2, 0, 3), w_2 = (0, 2, 0, 3), w_3 = (2, 0, 2, 0)$ appartengono a W.

2) Si verifichi se la seguente applicazione di $\mathbf{R^3}$ in $\mathbf{R^3}$ é lineare:

$$f : (x, y, z) \in \mathbf{R^3} \quad \longmapsto \quad (x - y, x + 2z, 0) \in \mathbf{R^3}.$$

In caso affermativo si determinino, dopo aver dato le rispettive definizioni, il nucleo e lo spazio immagine, e si dica se f é diagonalizzabile. Si dica inoltre se (1,2,0) è un autovettore per f.

3) Determinare la configurazione, al variare del parametro reale k, dei seguenti piani:

$$\begin{cases} x - y + kz & = & 0 \\ x + 2y + 2kz & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{cases}$$

4) Studiare e classificare, al variare del parametro reale h, la seguente famiglia di coniche:

$$C_h : x^2 + y^2 - x + h(xy - 3) = 0$$

Si calcoli inoltre, ove possibile, il centro della conica C_h.

5) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' = xe^x$$