MATEMATICA II _CONSORZIO NETTUNO _ 14/06/2004

*Cognome*______________________ *Nome*________________ *Matr.* ______________

ISTRUZIONI

Si consiglia fortemente di svolgere l'Esercizio 1 e l'Esercizio 2. In aggiunta devono essere svolti almeno un esercizio del GRUPPO A e almeno un esercizio del GRUPPO B.

- **Esercizio 1**. Assegnato il seguente endomorfismo di R^3:

$$\begin{aligned} f &: R^3 \longrightarrow R^3 \\ f(x,y,z) &= (2x-2y+z,\ z, -2y+3z) \end{aligned}$$

(i) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile e nel caso lo sia determinare una base di autovettori.

<u>SOLUZIONE</u> Determiniamo la matrice che rappresenta l'applicazione lineare nella base canonica:

$$f(1,0,0) = (2,0,0) \qquad f(0,1,0) = (-2,0,-2) \qquad f(0,0,1) = (1,1,3)$$

Quindi la matrice A$_f$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A - \lambda I = M = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |M| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)+2\right] = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2\right] = 0$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$. L'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2, invece l'autovalore 1 è una radice semplice.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato con $\lambda = 2$, si ha:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{-2y + z = 0 \text{ ovvero } z = 2y$$

La soluzione è: $z = 2y$, x e y sono le variabili libere. $V_2 = \{(x, y, 2y)$ con x,y $\in R\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,1,2)$, quindi $V_2 = \langle(1,0,0),(0,1,2)\rangle$. Faccio osservare che con V$_\lambda$ indico l'autospazio associato all'autovalore λ.

L'autospazio ha dimensione 2, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 2 e la sua molteplicità algebrica è 2).

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 1$, si ha:

$$A - \lambda I = M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono: x=z, y=z e z è la variabile libera. $V_1 = \{(z,z,z)$ con z $\in R\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,1,1)$, quindi $V_1 = \langle(1,1,1)\rangle$.

Una base di autovettori è la seguente: K=$\{u_1 = (1,0,0) \quad u_2 = (0,1,2) \quad u_3 = (1,1,1)\}$

Esercizio 2. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i seguenti elementi:

$$\alpha : x - y + z = 2 \qquad P \equiv (0,0,-1) \qquad r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta s passante per P ed ortogonale con α.

(ii) Determinare i parametri direttori della retta r.
(iii) Determinare il piano per P ortogonale alla retta r.
(iv) Determinare il piano contenente la retta r e passante per P.
(v) Calcolare la distanza del punto P dal piano α.
SOLUZIONE
(i) La retta in questione deve avere parametri direttori (l,m,n) proporzionali alle componenti ortogonali al piano e noi per comodità possiamo prenderli proprio uguali e quindi (l,m,n)=(1,-1,1). Un'equazione della retta s in forma parametrica è la seguente:
$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$ se si si vuole una rappresentazione cartesiana è sufficiente eliminare il parametro:
$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$
(ii) Per determinare i parametri direttori è sufficiente calcolare i minori a segno alterno della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è stata costruita considerando il sistema omogeneo associato al sistema che rappresenta l'equazione della retta.
I minori a segno alterno si ottengono cancellando la 1,2 e 3 colonna e calcolando i relativi determinanti.
Nel nostro caso la retta avrà parametri direttori $(-1, -1, 2)$.
(iii) I coefficienti (a,b,c) del piano da determinare saranno proprio i parametri direttori della retta r, quindi il piano avrà equazione $-x - y + 2z + k = 0$, a questo punto basta imporre il passaggio per P e determinare il valore di k, si ottiene k=2. In definitiva il piano avrà equazione $x + y - 2z - 2 = 0$.
(iv) Il fascio di piani avente come asse la retta r avrà eqauzione del tipo $x - y + \lambda(2x + z - 1) = 0$, imponendo il passaggio per il punto P si ha: $-2\lambda = 0$ e quindi $\lambda = 0$. Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene $x - y = 0$, e questo vuol dire che il piano che cercavamo è proprio uno dei due che rappresenta la retta r.
(v) In questo caso ci possiamo avvalere della formula della distanza:

$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Nel nostro caso si ha:

$$d(P, \alpha) = \frac{|-1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

1 GRUPPO A

- **a**$_1$. Nello spazio vettoriale standard R^3 si considerino i seguenti sistemi di vettori:

$$H = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

$$K = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1)\ \}$$

(i) Determinare lo spazio generato da H, lo spazio somma H+K. Quanto vale la dimensione di H∩K?
SOLUZIONE
I vettori di H sono indipendenti e quindi già possiamo asserire che lo spazio da essi generato avrà dimensione 2.
$L(H) = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) \mid \alpha \text{ e } \beta \in R\} =$
$=\{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha \text{ e } \beta \in R\} = \{(x, y, z) \mid \alpha = x,\ \beta = y, 0 = z\}$. Nel nostro caso il nostro sottospazio sarà caratterizzato dall'unica equazione z=0.
E' sufficiente osservare che il sistema H$\cup K$ contiene 4 vettori e tra essi ci sono i vettori della base canonica di R^3 e quindi lo spazio somma H+K non può che essere R^3. Per scoprire quanto vale la dimensione di H$\cap K$ possiamo utilizzare la formula di Grassmann:

$\dim(H\cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H+K) = 2+2-3 = 1.$

$\mathbf{a}_2$. Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan, ridurre a gradini la seguente matrice:

SOLUZIONE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \text{ scambio la prima riga con la seconda}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \quad \text{moltiplico la I riga per -2 e sommo con la II riga.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \quad \text{moltiplico la I riga per -1 e sommo con la IV riga.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \quad \text{moltiplico la II riga per -1 e sommo con la III riga.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \quad \text{moltiplico la II riga per 1 e sommo con la IV riga.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \quad \text{moltiplico la III riga per 4 e sommo con la IV riga.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

l’ultima matrice è a gradini.

2

3 GRUPPO B

- **b**$_1$. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Se H=$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ è una sua base e $w \in V$ un suo generico vettore, dire in quanti modi w è combinazione lineare dei vettori di H. Giustificare la risposta.

  SOLUZIONE

  w è combinazione lineare dei vettori di una base in unico modo, infatti supponiamo che che

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \\ & \quad e \\ w &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n \end{aligned}$$

  Sottraendo membro a membro le due relazioni si ottiene $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$.

  I vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ sono indipendenti e questo vuol dire che $(\alpha_1 - \beta_1) = 0, (\alpha_2 - \beta_2) = 0, ..., (\alpha_n - \beta_n) = 0$, ovvero

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$$

- **b**$_2$. Enunciare il Lemma di Steinitz.

  SOLUZIONE

  Sia H=$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V e K=$\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ un sitema libero dello stesso spazio vettoriale V, allora il numero di vettori del sistema di generatori è maggiore o uguale del numero di vettori del sistema libero. In altri termini $n \geq m$.

FRANCO FERNICOLA