MATEMATICA II _CONSORZIO NETTUNO _ 30/01/2004

*Cognome*________________________ *Nome*_________________ *Matr.* ________________

- **1**. Nello spazio vettoriale standard R^4 siano assegnati i seguenti vettori:

$$v_1 = (1,0,1,2) \quad v_2 = (0,1,0,1) \quad v_3 = (1,-1,1,1) \quad v_4 = (2,-1,2,3)$$

(i) Il precedente sistema S= $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ è indipendente? (ii) Si determini la dimensione e una base B del sottospazio H=$[v_1,v_2,v_3,v_4]$.

SOL. Osserviamo che $v_3 = v_1 - v_2$ e quindi possiamo subito rispondere che il sistema S non è indipendente. Continuando osserviamo che $v_4 = 2v_1 - v_2$. Dal sistema di partenza ci siamo ricondotti ai primi due vettori, che essendo non proporzionali sono indipendenti. in conclusione H è un sottospazio di dimensione 2 e una sua base è B= $\{v_1,v_2\}$.

- **2**. Assegnato il seguente endomorfismo di R^3:

$$f \,:\, R^3 \to R^3$$

$$f(x,y,z) = (2x,2y,6x-3y-z)$$

(i) Dire se tale tale endomorfismo è diagonalizzabile ed eventualmente determinare una base di autovettori.

SOL. Determiniamo la matrice che rappresenta l'applicazione lineare nella base canonica:

$$f(1,0,0) = (2,0,6) \qquad f(0,1,0) = (0,2,-3) \qquad f(0,0,1) = (0,0,-1)$$

Quindi la matrice A_f è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A - \lambda I = M = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |M| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$. L'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2, invece l'autovalore -1 è una radice semplice.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato con $\lambda = 2$, si ha:

$$M = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \{6x - 3y - 3z = 0 \text{ ovvero } 2x - y - z = 0$$

La soluzione è: $y = 2x - z$, x e z sono le variabili libere. $V_2 = \left\{(x,2x-z,z) \text{ con x,z} \in R\right\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (1,2,0)$ e $u_2 = (0,-1,1)$, quindi $V_2 = \langle(1,2,0),(0,-1,1)\rangle$. Faccio osservare che con V_λ indico l'autospazio associato all'autovalore λ.

L'autospazio ha dimensione 2, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 2 e la sua molteplicità algebrica è 2).

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = -1$, si ha:

$$A - \lambda I = M = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 3y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono: x=0, y=0 e z è la variabile libera. $V_{-1} = \{(0,0,z) \text{ con z} \in R\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (0,0,1)$, quindi $V_{-1} = \langle(0,0,1)\rangle$.

Una base di autovettori è la seguente:

K=$\{u_1 = (1,2,0) \quad u_2 = (0,-1,1) \quad u_3 = (0,0,1)\}$.

- **3**. Determinare al variare del parametro $\lambda \in R$ le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + y - 2z = 0 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y - z = -1 \end{cases}$$

SOL. Scriviamo la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

IL determinante di tale matrice è $det(A) = \lambda^2 - 1$.

Per il Teorema di Cramer se $\lambda^2 - 1 \neq 0$ e quindi $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -1$, le soluzioni sono le seguenti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - 1} = \frac{-2-2\lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{-2}{\lambda - 1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - 1} = \frac{2+2\lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{2}{\lambda - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - 1} = \frac{-\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} = -1$$

La soluzione è la terna $\left(\frac{-2}{\lambda - 1}, \frac{2}{\lambda - 1}, -1\right)$ al variare di $\lambda \in R$ e con $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -1$.

<u>Casi particolari</u>

Se $\lambda = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e quella completa sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con un facile controllo si nota che la matrice A ha rango 2 e invece B ha rango 3. Si conlude che il sistema per $\lambda = 1$ è incompatibile.

Se $\lambda = -1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -x+y-2z = 0 \\ x-y+z = 1 \\ -x+y-z = -1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e quella completa sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con un facile controllo si nota che le matrici A e B hanno rango 2. Il sistema è compatibile è ammette ∞^1 soluzioni.

Il sistema da studiare è il seguente:

$$\begin{cases} y-2z = x \\ -y+z = 1-x \end{cases}$$

La cui soluzione è costituita dalle terne dell'insieme S= $\{(x, x-2, -1)$ con x $\in R\}$.

- **4**. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i seguenti elementi:

$$A \equiv (0,1,0) \qquad r : \begin{cases} x-y+z = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \qquad \pi : \{2x-y-z = 1$$

(i) Determinare il piano α per A perpendicolare ad r

(ii) Determinare la retta s per A perpendicolare al piano π.

(iii) Determinare la distanza del punto A dal piano π.

SOL. (i) Una terna di parametri direttori della retta r è la seguente: $(-1,0,1)$. Un generico piano ha equazione $ax+by+cz+d = 0$. La terna (a,b,c) che sono le componenti di un vettore ortogonale al piano deve essere proporzionale ai parametri direttori della retta per soddisfare la nostra condizione. Possiamo prendere (a,b,c) proprio concidente con $(-1,0,1)$. Il piano diventa $-x+z+d = 0,$ imponiamo il passaggio per A e otteniamo d=0. L'equazione del piano α richesto è $x-z = 0$.

(ii) Una terna di parametri direttori della retta richiesta è $(2,-1,-1)$ che sono proprio le componenti di un vettore ortogonale al piano.

Una forma parametrica di s sarà:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1-t \\ z = -t \end{cases}$$

Eliminando il parametro otteniamo una delle sue rappresentazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x+2z = 0 \\ y-z-1 = 0 \end{cases}$$

(iii) In questo caso possiamo utilizzare la formula

$$d(A,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-1-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Oppure possiamo intersecare la retta s con il piano π. Facendo i calcoli otteniamo

$2(2t)-(1-t)-(-t) = 1,$ da cui si ricava $t = \frac{1}{3}$ e sostituendo tale valore nella rappresentazione parametrica di s, si ha $Q \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Calcoliamo la distanza tra i punti A e Q e otteniamo:

$$d(A,Q) = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- **5**. Si classifichi la seguente conica:

$$x^2+y^2+2xy+2y = 0$$

SOL. La matrice associata alla conica è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La conica è non degenere poichè det(A)=-1, inoltre essendo $|A_{33}| = 0$ trattasi di una parabola.