MATEMATICA II _CONSORZIO NETTUNO _ 29/09/2004

*Cognome*____________________ *Nome*_______________ *Matr.* _____________

- **Esercizio 1**. Assegnato il seguente endomorfismo di R^3:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad R^3 \longrightarrow R^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (x+y,\ x-y,0) \end{aligned}$$

(i) Dire se il vettore v=(0,0,1) appartiene al nucleo.
(ii) Determinare una base di Kerf e Imf.
(iii) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile e nel caso lo sia determinare una base di autovettori.
SOLUZIONE
(i) E' sufficiente osservare che f(0,0,1)=(0,0,0) e quindi v_1 è un vettore che appartiene al nucleo.
(ii)Per determinare una base di Kerf è sufficiente risolvere il seguente sistema:
$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$. Osservate che questo è un sistema di due equazioni in 3 incognite e quindi l'insieme delle soluzioni è:

$$K\text{erf} = \{(0,0,z) \text{ con z} \in R\}$$

Una base di Kerf è costituita dal vettore v=(0,0,1).
Per determinare una base di Imf possiamo scrivere la matrice associata a f nella base canonica:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne di questa matrice che fanno parte di un minore di ordine massimo con determinante diverso da 0 costituiscono una base di Imf. Nel nostro caso una base sarà costituta dai vettori $w_1 = (1,1,0)$ e $w_2 = (1,-1,0)$.
(iii) Utlizziamo la matrice A_f e calcoliamo il polinomio caratteristico.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda^3$$

Le radici sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.
Possiamo subito rispondere che l'endomorfismo è diagonalizzabile perchè abbiamo 3 autovalori distinti.
In corrispondenza all'autovalore $\lambda_1 = 0$ troviamo l'autospazio $V_0 = \langle(0,0,1)\rangle$
In corrispondenza all'autovalore $\lambda_2 = \sqrt{2}$ troviamo l'autospazio $V_{\sqrt{2}} = \langle(1, 1-\sqrt{2}, 0)\rangle$
In corrispondenza all'autovalore $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ troviamo l'autospazio $V_{-\sqrt{2}} = \langle(1, 1+\sqrt{2}, 0)\rangle$
Il sistema H=$\{(0,0,1), (1, 1-\sqrt{2}, 0), (1, 1+\sqrt{2}, 0)\}$ è una base di autovettori.

- **Esercizio 2**. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,0,1) \qquad\qquad r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ z=1 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta s passante per P e avente gli stessi parametri direttori della retta r.
(ii) Determinare il piano α contenente la retta r e s .
(iii) Determinare il piano β passante per l'origine e ortogonale a r.
(iv) Calcolare la distanza del punto P dal piano β.
SOLUZIONE
(i) I parametri direttori della retta r sono (l,m,n)=(1,1,0). Quindi una forma parametrica della retta s sarà:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

o in forma cartesiana: $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

(ii) Dalle equazioni delle rette si vede subito che il piano che contiene le due rette è z=1. Oppure fate il fascio di piani contenenti la retta r e imponete il passaggio di tale fascio per il punto P.

(iii) Tale piano avra equazione ax+by+cz=0 e i cofficienti (a,b,c) saranno proporzionali ai numeri direttori della retta r e quindi nel nostro caso si avrà x+y=0.

(iii) Per calcolare la distanza utilizziamo la formula:

$$\begin{aligned} d(P, \alpha) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ d(P, \alpha) &= \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- **Esercizio 3**. Si classifichi la seguente conica:

$$xy - 2x + y - 5 = 0$$

SOLUZIONE

La matrice della conica è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è diverso da 0 e quindi trattasi di una conica non degenere, essendo $A_{33} = -\frac{1}{4}$ possiamo dire che essa è una iperbole.

1 GRUPPO A

- $\mathbf{a}_1$. Esibire in forma cartesiana le equazioni di due sottospazi di R^3 la cui intersezione genera un sottospazio di dimensione 1. Determinare una base di quest'ultimo sottospazio.

SOLUZIONE

Possiamo considerare come H=$\{(x, y, z)|$ x=0$\}$ e K=$\{(x, y, z)|$ y=0$\}$. La loro intersezione è un sottospazio di dimensione 1 e nel nostro caso:

$$H \cap K = \{(x, y, z)| \text{ x=0 e y=0}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

- $\mathbf{a}_2$. Si consideri il seguente sistema parametrico di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ (1 - \lambda) y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Per quali valori del parametro reale λ il sistema ammette un'unica soluzione?

(ii) Determinare le soluzioni corrispondenti al valore $\lambda = 2$.

Il sistema è omogeneo e la sua matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è: $\lambda\,(2 - \lambda)$ e quindi per ogni valore di λ diverso da 2 e 0 il sistema ammette un'unica soluzione.

E' facile controllare che per $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ il sistema ammette infinite soluzioni, in particolare per $\lambda = 2$ le soluzioni sono:

$$S\,\{(0, x, -x)| \text{ con x} \in R\}$$

2 GRUPPO B

- **b**$_1$.Sia f un endomorfismo di V. Si dimostri che se v_1 e v_2 sono autovettori di autovalore λ, allora anche $v_1 + v_2$ è un autovettore di autovalore λ.
  SOLUZIONE

Sappiamo che $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$, allora $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$, leggendo la prima e l'ultima di tale relazione deduciamo che anche $v_1 + v_2$ è un autovettore di autovalore λ.

- **b**$_2$.Dimostrare che se f è un endomorfismo iniettivo, allora f trasforma sistemi di vettori indipendenti in sistemi indipendenti.

Sia H=$\{v_1, v_2, ..., v_h\}$ un sistema di h vettori linearmente indipendenti. Vogliamo dimostrare che il sistema

$$K = \{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_h)\}$$

è indipendente nelle ipotesi che f sia iniettivo.

Posto

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_h f(v_h) = 0$$

dobbiamo provare che $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_h = 0$. Ma dalla precedente relazione applicando le relazioni sulla linearità si ha:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_h v_h) = 0$$

Ma f è iniettiva, allora $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_h v_h = 0$. Ora sfruttiamo l'ipotesi che il sistema H è indipendente e quindi deduciamo che:

$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_h = 0$ e questo vuol dire che

$$K = \{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_h)\}$$

è indipendente.

FRANCO FERNICOLA