

MATEMATICA II _CONSORZIO NETTUNO _29/09/2004

Cognome _____ Nome _____ Matr. _____

- **Esercizio 1.** Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, 0)$$

- (i) Dire se il vettore $v=(0,0,1)$ appartiene al nucleo.
 - (ii) Determinare una base di $\text{Ker}f$ e $\text{Im}f$.
 - (i) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile e nel caso lo sia determinare una base di autovettori.
- **Esercizio 2.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

- (i) Determinare la retta s passante per P e avente gli stessi parametri direttori della retta r .
 - (ii) Determinare il piano α contenente la retta r e s .
 - (iii) Determinare il piano β passante per l'origine e ortogonale a r .
 - (v) Calcolare la distanza del punto P dal piano β .
- **Esercizio 3.** Si classifichi la seguente conica:

$$xy - 2x + y - 5 = 0$$

1 GRUPPO A

- **a₁.** Esibire in forma cartesiana le equazioni di due sottospazi di \mathbb{R}^3 la cui intersezione genera un sottospazio di dimensione 1. Determinare una base di quest'ultimo sottospazio.
- **a₂.** Si consideri il seguente sistema parametrico di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ (1 - \lambda)y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

- (i) Per quali valori del parametro reale λ il sistema ammette un'unica soluzione?
- (ii) Determinare le soluzioni corrispondenti al valore $\lambda = 2$.

2 GRUPPO B

- **b₁.** Sia f un endomorfismo di V . Si dimostri che se v_1 e v_2 sono autovettori di autovalore λ , allora anche $v_1 + v_2$ è un autovettore di autovalore λ .
- **b₂.** Dimostrare che se f è un endomorfismo iniettivo, allora f trasforma sistemi di vettori indipendenti in sistemi indipendenti.