

MATEMATICA II _CONSORZIO NETTUNO _ 14/06/2004

Cognome _____ Nome _____ Matr. _____

ISTRUZIONI

Si consiglia fortemente di svolgere l'Esercizio 1 e l'Esercizio 2. In aggiunta devono essere svolti almeno un esercizio del GRUPPO A e almeno un esercizio del GRUPPO B.

- **Esercizio 1.** Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y, z) = (2x - 2y + z, z, -2y + 3z)$$

(i) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile e nel caso lo sia determinare una base di autovettori.

- **Esercizio 2.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i seguenti elementi:

$$\alpha : x - y + z = 2 \quad P \equiv (0, 0, -1) \quad r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

- (i) Determinare la retta s passante per P ed ortogonale con α .
- (ii) Determinare i parametri direttori della retta r .
- (iii) Determinare il piano per P ortogonale alla retta r .
- (iv) Determinare il piano contenente la retta r e passante per P .
- (v) Calcolare la distanza del punto P dal piano α .

1 GRUPPO A

- **a₁.** Nello spazio vettoriale standard \mathbb{R}^3 si considerino i seguenti sistemi di vettori:

$$H = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

$$K = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

(i) Determinare lo spazio generato da H , lo spazio somma $H+K$. Quanto vale la dimensione di $H \cap K$?

- **a₂.** Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan, ridurre a gradini la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 GRUPPO B

- **b₁.** Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n . Se $H = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una sua base e $w \in V$ un suo generico vettore, dire in quanti modi w è combinazione lineare dei vettori di H . Giustificare la risposta.
- **b₂.** Enunciare il Lemma di Steinitz.