MATEMATICA II _CONSORZIO NETTUNO _ 12/07/2004

*Cognome*______________________ *Nome*________________ *Matr.* ______________

ISTRUZIONI

Si consiglia fortemente di svolgere l'Esercizio 1 *e l'Esercizio* 2. *In aggiunta devono essere svolti almeno un esercizio del GRUPPO A e almeno un esercizio del GRUPPO B.*

Esercizio 1. Assegnato il seguente endomorfismo di R^3:

$$f \; : \; R^3 \qquad R^3$$

$$f \; x,y,z \qquad x \quad y, \;\; 2y, x \quad z$$

(i) Verificare se tale endomorfismo è diagonalizzabile.

(ii) Determinare il nucleo e una base dell'immagine. Dire se tale endomorfismo è un isomorfismo.

(iii) Verificare quali dei seguenti vettori è un autovettore:

$$v_1 \qquad 1,0, \;\; 1 \;, v_2 \qquad 0,0,1 \;, v_3 \qquad 3, \;\; 9, \;\; 1$$

Esercizio 2. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i seguenti elementi:

$$P \qquad 2, \;\; 1,1 \qquad Q \qquad 1,0,1 \qquad r : \begin{cases} x \quad y \quad z \qquad 0 \\ \quad x \qquad 1 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta *s* passante per i punti P e Q.

(ii) Determinare il piano contenenete la retta *r* e passante per *P* .

(iii) Determinare il piano passante per Q ed ortogonale alla retta *s*

(iv) Determinare la retta *t* per P ortogonale e incidente la retta *r*.

GRUPPO A

a$_1$. In R^3 sia assegnato il seguente sistema: $H \qquad 1, \;\; 1,0 \;, \quad 1,1,1 \;, \;\; 0,0,1$

(i) H è un sistema libero o legato?

(ii) H è un sistema di generatori di R^3?

Motivare tutte le risposte

a$_2$. Dire se la seguente matrice è invertibile ed eventualmente determinare la sua inversa:

$$A \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

GRUPPO B

b$_1$. In uno spazio vettoriale reale V di dimensione n consideriamo un sistema H.

(i) Se H contiene il vettore nullo, può essere un sistema di generatori di V?

(ii) Se H è libero e v L(H), che cardinalità deve avere H affinchè H v sia una base di V?

Giustificare tutte le risposte, eventualmente facendo degli esempi che coinvolgano gli spazi vettoriali di tipo R^n.

b$_2$. Siano H e K sottospazi vettoriali di dimensione 2 dello spazio vettoriale standard R^3.

Dimostrare che $H \quad K \qquad \underline{0}$ sfruttando la formula di Grassmann.