MATRICI E OPERAZIONI SU DI ESSE

Siano assegnati due interi n≥ 1 e m≥ 1, diremo matrice di dimensione mxn sul campo reale un'espressione di questo tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gli elementi che figurano all'interno della tabella sono numeri reali. L'insieme delle matrici di dimensione mxn si indica con $M_{m,n}(R)$. E' consuetudine indicare una matrice A con la notazione $A = (a_{ij})$, dove a$_{ij}$ indica il generico elemento della matrice. Il primo indice è quello di riga e il secondo indice è quello di colonna. Il generico elemento a$_{ij}$ si trova "all'incrocio" della i-esima riga con la j-esima colonna. Ovviamente i è un indice che varia da 1 a m e j invece varia da 1 a n.

Example 1 *Sia assegnata la matrice A=*$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *, in questo caso* $a_{12} = 3$, $a_{32} = 8$, $a_{22} = 1$, $a_{43} = -2$. *Osserviamo che l'indice di riga varia tra 1 e 4 e l'indice di colonna tra 1 e 3.*

Ora che abbiamo introdotto questo nuovo tipo di "oggetto" vediamo di dare alcune definizioni.

Definition 1 *Una matrice si dice quadrata se n=m, ovvero il numero di righe coincide con il numero di colonne. In questo caso anzichè parlare di matrice di dimensione nxn, diremo matrice di ordine n.*

Example 2 *Le seguenti matrici sono tutte quadrate, rispettivamente di ordine 1, 2, 3 e 4*

$$A = (-3), B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 2 *Una matrice si dice nulla se <u>ogni</u> elemento all'interno della tabella è nullo.*

Example 3 *Assegnate le seguenti matrici* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Le matrici B e C sono nulle, mentre A non è una matrice nulla.*

Definition 3 *Sia assegnata una matrice A=(a_{ij}) quadrata di ordine n. Diremo diagonale principale gli elementi della matrice che si trovano sul segmento che congiunge l'elemento di posto (1,1) con quello di posto (n,n). Diremo diagonale secondaria gli elementi della matrice che si trovano sul segmento che congiunge l'elemento di posto (1,n) con quello di posto (n,1).*

Example 4 *Sia assegnata la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *. La diagonale principale è costituita dagli elementi 2,-1,7. La diagonale secondaria dagli elementi -4,-1,-2.*

Ora conosciamo un nuovo tipo di oggetto che sono le matrici. Introdurremo alcune operazioni tra di esse: la somma tra matrici, il prodotto tra un numero reale e una matrice e infine vedremo come si moltiplicano due matrici.

(Subsubsubsection head:)SOMMA TRA MATRICI

Definition 4 *Siano A e B due matrici tali che* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ *e* $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(R)$*. Si può definire la seguente operazione:*

$$+ : M_{m,n}(R)xM_{m,n}(R) \longrightarrow M_{m,n}(R)$$
$$(A, B) \longrightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Example 5 *Sia A=*$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & \sqrt{3} \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e B=*$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A + B = C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & \sqrt{3}+1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. In poche parole secondo questa definzione si possono sommare soltanto matrici della stessa dimensione e la somma avviene in maniera abbastanza naturale, ovvero sovrapponendo le matrici e sommando gli elementi che occupano la medesima posizione.

Exercise 1 *Siano assegnate le seguenti matrici A=*$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ *,B=*$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *,D=*$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *,E=*$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & - \end{pmatrix}$

F=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *,G=*$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *. Calcolare tutte le possibili somme.*

0.0.1

(Subsubsubsection head:)PRODOTTO TRA UNO SCALARE E UNA MATRICE

Definition 5 *Sia A=*$(a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ *una matrice e* $\alpha \in R$ *uno scalare. Si può definire la seguente operazione:*

$$\circ : RxM_{m,n}(R) \longrightarrow M_{m,n}(R)$$
$$(\alpha, A) \longrightarrow \alpha \circ A = (\alpha a_{ij})$$

Example 6 *Sia A=*$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *e B=*$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$*, allora 3∘A =* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ *e -1∘B=*$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercise 2 *Siano assegnate le seguenti matrici* $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Calcolare $\sqrt{2} \circ A, 3 \circ B, -4 \circ C$.

0.0.2

(Subsubsubsection head:)PRODOTTO TRA MATRICI

Definition 6 *Siano A e B due matrici tali che* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ *e* $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(R)$. *Si può definire la seguente operazione:*

$$* : M_{m,n}(R) x M_{n,p}(R) \longrightarrow M_{m,p}(R)$$

$$(A, B) \longrightarrow A * B = C = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Osserviamo che il prodotto tra due matrici è possibile se il numero di colonne della prima matrice coincide con il numero di righe della seconda matrice. La definizione data attraverso gli indici sembra un pochino articolata, non è così!!!

Quella scrittura vuol dire che l'elemento di posto (i,j) della matrice da costruire si ottiene moltiplicando scalarmente la riga i-esima della prima matrice con la colonna j-esima della seconda matrice $c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})(b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj})$

Example 7 *Sia* $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *calcolare A*B.*

Intanto osserviamo che A è una matrice di dimensione 2x3 e B una matrice di dimensione 3x4, la matice A*B che possiamo indicare anche con C sarà di tipo 2x4. Ad esempio l'elemento di posto (2,3) della matrice C si ottiene moltiplicando scalarmente la seconda riga di A con la terza colonna di B e quindi $c_{23} = (0, -1, 2)(1, 2, 1) = 0 - 2 + 2 = 0$. Fatta questa osservazione possiamo dire che la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 3 *Assegnate le seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ove possibile calcolare il prodotto tra matrici.

Definition 7 *Assegnata una matrice* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ *si definisce* <u>*trasposta*</u> *di A e si indica con* A^T *la seguente matrice:*

$$A^T = (b_{ij}) \text{ con } \mathrm{b}_{ij} = a_{ji}$$

Per costruire la trasposta di una matrice si devono scambiare le righe con le colonne o viceversa.

Example 8 *Se* $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, *allora* $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercise 4 *Calcolare le trasposte delle seguenti matrici:* $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Definition 8 *Una matrice quadrata* $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ *si dice* <u>*simmetrica*</u> *se* $A = A^T$, *si dice* <u>*antisimmetrica*</u> *se* $A = -A^T$

Example 9 *Sono simmetriche le seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono antisimmetriche le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 9 *Una matrice quadrata A si dice* <u>*triangolare alta*</u> *se verifica la seguente relazione:*

$$i \succ j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

In sostanza al di sotto della diagonale principale gli elementi devono essere nulli. Attenzione che questo non significa che gli elementi al di sopra della diagonale principale non possono essere nulli. L'importante che lo siano al di sotto della diagonale principale.

Example 10 *Le seguenti matrici sono triangolari alte:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 10 *Una matrice quadrata A si dice* <u>*triangolare bassa*</u> *se verifica la seguente relazione:*

$$i \prec j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

Stessa osservazione fatta in precedenza

Example 11 *Le seguenti matrici sono triangolari basse:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 11 *Una matrice quadrata A si dice* <u>*diagonale*</u> *se verifica la seguente relazione:*

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

In altre parole una matrice diagonale è triangolare alta e bassa.

Example 12 *Le seguenti matrici sono diagonali:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$