INVERSA DI UNA MATRICE

Definition 1 *Una matrice quadrata A di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B dello stesso ordine e vale la seguente relazione.*

$$A * B = I \text{ e } B * A = I \text{ (I indica la matrice unitaria di ordine n)}$$

Remark 1 *In realtà è sufficiente provare una sola delle due relazioni affinche sia vera anche l'altra. In altri termini* $A * B = I \Longleftrightarrow B * A = I$.

La matrice B si dice inversa di A e solitamente si indica con A^{-1}. Si prova facilmente che l'inversa di A se esiste è unica, infatti: Siano B_1 e B_2 inverse di A

$A * B_1 = I = B_1 * A$

$A * B_2 = I = B_2 * A$

otteniamo: $B_1 = B_1 * I = B_1 * (A * B_2) = (B_1 * A) * B_2 = I * B_2 = B_2$

Example 2 *Sia assegnata la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$*,si verifica facilmente che l'inversa di A è la seguente matrice:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remark 2 *Le domande che ci poniamo sono le seguenti:*

1) Assegnata una matrice quadrata A esiste l'inversa?
2) Se esiste come si calcola l'inversa di una matrice?

Alla prima domanda risponde la seguente:

Proposition 3

$$\begin{aligned} A &\in M(n,R) \textit{ è invertibile} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \\ &\quad \textit{equivalentemente} \\ A &\in M(n,R) \textit{ non è invertibile} \Leftrightarrow |A| = 0 \end{aligned}$$

Se è assegnata una matrice quadrata e il suo determinante è diverso da 0 procediamo a calcolare l'inversa utilizzando uno dei due seguenti metodi.

I metodo

Sia assegnata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ dell'esempio precedente. Il suo determinante vale 1, ha senso calcolare l'inversa. Dalla definizione di matrice invertibile dobbiamo determinare una matrice B=$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ tale che si abbia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ equivalentemente}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 & x_2 + 2y_2 \\ 2x_1 + 5y_1 & 2x_2 + 5y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'uguaglianza tra matrici si traduce nei seguenti due sistemi:

(1)$\begin{cases} x_1 + 2y_1 = 1 \\ 2x_1 + 5y_1 = 0 \end{cases}$ e (2)$\begin{cases} x_2 + 2y_2 = 0 \\ 2x_2 + 5y_2 = 1 \end{cases}$, dobbiamo risolvere i due sistemi con il metodo di Gauss-Jordan

(1^0 sistema) M_1=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = 5$ e $y_1 = -2$

(2^0 sistema) M_2=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_2 = -2$ e $y_2 = 1$

Abbiamo determinato i 4 valori e l'inversa è la seguente:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che i due sistemi potevano essere risolti contemporaneamente, infatti si poteva operare nel seguente modo:

(*) M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, come si vede nelle ultime due colonne compare la matrice inversa di quella assegnata.

<u>ATTENZIONE</u>

Quando dobbiamo calcolare l'inversa di una matrice con questo metodo si procede come null'ultima parte (*), i passaggi iniziali giustificano il metodo adottato.

Example 4 *Si calcoli se esiste l'inversa della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A è 1, ha senso calcolare l'inversa e si procede nel seguente modo:

1) Si scrive una matrice 2x4

2) Nel primo "riquadro" trascriviamo la matrice assegnata e nell'ultimo la matrice unitaria.

3) Con trasformazioni elementari facciamo in modo che nel primo riquadro compaia la matrice identica, a questo punto possiamo "leggere" nell'ultimo riquadro la matrice inversa di quella assegnata.

M=$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Example 5 *Si calcoli se esiste l'inversa della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A è -1, ha senso calcolare l'inversa e si procede nel seguente modo:

1) Si scrive una matrice 3x6

2) Nel primo "riquadro" trascriviamo la matrice assegnata e nell'ultimo la matrice unitaria.

3) Con trasformazioni elementari facciamo in modo che nel primo riquadro compaia la matrice identica, a questo punto possiamo "leggere" nell'ultimo riquadro la matrice inversa di quella assegnata.

M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \backsim$

$\backsim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

II metodo

Definition 6 *Sia data una matrice quadrata di ordine n* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$. *Si dice complemento algebrico dell'elemento a_{ij} la seguente quantità:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Osserviamo che M_{ij} è la sottomatrice di ordine n-1 che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Example 7 *Assegnata la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *,si ha:*

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Example 8 *Assegnata la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*,si ha:*

$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$
1

Ricordiamo che vale la seguente:

$$A \in M(n, R) \text{ è invertibile} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Remark 3 *Per calcolare l'inversa di una matrice* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$ *con questo metodo eseguiamo i seguenti passi:*

1) Calcoliamo il determinante della matrice A , se diverso da 0 procediamo.

2) Calcoliamo i complementi algebrici di ciascun elemento e costruiamo la seguente matrice:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & .... & A_{2n} \\ ... & .... & .... & .... \\ A_{n1} & A_{n2} & .... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3) Facciamo la trasposta della matrice precedente, costruendo la seguente matrice:

$$\widehat{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & .... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .... & A_{n2} \\ ... & .... & .... & .... \\ A_{1n} & A_{2n} & .... & A_{nn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{AGGIUNTA}$$

4) Dividiamo ciascun elemento dell'aggiunta per il determinante e così otteniamo l'inversa della matrice assegnata:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & .... & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & .... & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ ... & .... & .... & .... \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & .... & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Vediamo qualche applicazione di questo metodo.

Example 9 *Si calcoli, se esiste, l'inversa della seguente matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(Abbiamo già calcolato l'inversa di questa matrice con il primo metodo, è utile ripetere il calcolo con il secondo metodo. Si potrà valutare quale dei due è piu' efficace).

1) Il determinante di A vale 1

2) Calcoliamo i complementi algebrici degli elementi e costruiamo la seguente matrice:

$$A_{11} = 5,\ A_{12} = -2,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 1$$

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Facciamo la trasposta della matrice precedente, costruendo la seguente matrice:

$$\widehat{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{AGGIUNTA}$$

4) Dividendo ciascune elemento dell'aggiunta per il determinante (ricordiamo che vale 1) otteniamo l'inversa della matrice assegnata:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Example 10 *Si calcoli, se esiste, l'inversa della seguente matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

(Abbiamo già calcolato l'inversa di questa matrice con il primo metodo)

1) Il determinante di A vale -1

2) Calcoliamo i complementi algebrici degli elementi e costruiamo la seguente matrice:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 5,\ A_{12} = 4,\ A_{13} = 5 \\ A_{21} &= 3,\ A_{22} = 2,\ A_{23} = 2 \\ A_{31} &= 1,\ A_{32} = 1,\ A_{33} = 1 \end{aligned}$$

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Facciamo la trasposta della matrice precedente, costruendo la seguente matrice:

$$\widehat{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ AGGIUNTA}$$

4) Dividiamo ciascun elemento dell'aggiunta per il determinante (ricordiamo che vale -1) otteniamo l'inversa della matrice assegnata:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZI

1) Delle seguenti matrici determinare se esiste l'inversa e calcolarla con uno dei due metodi sopra esposti.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Determinare i valori del parametro reale k$\in R$ per i quali le seguenti matrici sono invertibili e per tali valori determinare l'inversa della matrice con il metodo che si ritiene piu' opportuno.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2k & 2 \\ k & k \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & k & 0 & -1 \\ k & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$