RETTA PER UN PUNTO DI DIREZIONE ASSEGNATA

Se nello spazio si fissa un punto P(x_0, y_0, z_0) e si fissa la direzione (l,m,n), la retta per P di direzione v=(l,m,n) ha la sua rappresentazione parametrica data dalle seguenti relazioni: $r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, se eliminiamo il parametro t otteniamo un sistema di due equazioni in tre variabili del tipo r:$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$, tale sistema si dice che è una rappresentazione cartesiana della retta.

Example 1 *Scrivere l'equazione della retta passante per P(1,2,1) e con direzione v=(1,-1,2)*

Forma parametrica $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

se esplicitiamo t dalla prima relazione si ha: t=x-1 e sostituendo nella seconda e terza relazione si ottiene: $r : \begin{cases} y = 2 - x + 1 \\ z = 1 + 2x - 2 \end{cases}$, riordinando i termini si ha:

Forma cartesiana $r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

Example 2 *Scrivere l'equazione della retta passante per P(1,0,1) e con direzione v=(1,0,-1)*

forma parametrica $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$

In questo caso un'equazione è y=0 e l'altra si trova con un semplice calcolo x+z-2=0

forma cartesiana $r : \begin{cases} y = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Exercise 1 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e con i seguenti parametri direttori. In ciascun caso determinare entrambi le rappresentazioni.*

$P \equiv (1, 2, 1)$, (l,m,n)=$(0, 0, 1)$

$P \equiv (2, 2, 3)$, (l,m,n)=$(1, 1, 2)$

$P \equiv (2, 3, 1)$, (l,m,n)=$(1, 0, 1)$

$P \equiv (0, 0, 0)$, (l,m,n)=$(1, 1, 1)$

0.1

0.2 RETTA PER UN PUNTO PERPENDICOLARE AD UN PIANO

Sappiano che l'equazione di un piano è data $ax + by + cz + d = 0$ con a,b e c non tutti nulli. Facciamo osservare che (a,b,c) sono le componenti di un vettore non nullo ortogonale al piano.

Example 3 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P(1,2,2) ed ortogonale al piano 2x-y+3z+3=0*

Soluzione La direzione della retta è data dal vettore v=(2,-1,3), applicando le relazioni $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, si ha:
$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$, eventualmente eliminando il parametro si determina una rappresentazione cartesiana della retta.

Example 4 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P(2,1,-1) ed ortogonale al piano x-z=0*

Soluzione La direzione della retta è data dal vettore v=(1,0,-1), applicando le relazioni $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, si ha:
$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$, eventualmente eliminando il parametro si determina una rappresentazione cartesiana della retta.

Exercise 2 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e perpendicolare al piano* π :

$$\pi : x + y + z - 2 = 0 \text{ e } P \equiv (1, 1, 1)$$

$$\pi : 2x - y + 3 = 0 \text{ e } P \equiv (0, 1, 1)$$

$$\pi : 3x + y = 0 \text{ e } P \equiv (1, 0, 0)$$

$$\pi : z = 0 \text{ e } P \equiv (0, 1, 1)$$

0.3 PIANO PER UN PUNTO PARALLELO AD UN PIANO

Example 5 *Sia assegnato il punto P(2,1,4) e il piano di equazione 2x-3y+2z+1=0. Scrivere l'equazione del piano passante per P e parallelo al piano assegnato*

Soluzione L'equazione di un qualsiasi piano parallelo a quello assegnato è del tipo 2x-3y+2z+k=0, in questo caso è sufficiente imporre il passaggio per il punto P(2,1,4) e si ottiene 4-3+8+k=0 da cui k=-9. Il piano richiesto ha equazione 2x-3y+2z-9=0.

Example 6 *Sia assegnato il punto P(0,1,1) e il piano di equazione 2x-3y=0. Scrivere l'equazione del piano passante per P e parallelo al piano assegnato*

Soluzione L'equazione di un qualsiasi piano parallelo a quello assegnato è del tipo 2x-3y+k=0, in questo caso è sufficiente imporre il passaggio per il punto P(0,1,1) e si ottiene -3+ k=0, da cui k=3. Il piano richiesto ha equazione 2x-3y+3=0.

Exercise 3 *Sia assegnato il punto P(0,1,1) e il piano di equazione x-3y=0. Scrivere l'equazione del piano passante per P e parallelo al piano assegnato.*

Exercise 4 *Sia assegnato il punto P(-1,1,1) e il piano di equazione 2x-3y+7=0. Scrivere l'equazione del piano passante per P e parallelo al piano assegnato.*

0.4

0.5 PIANO PER UN PUNTO E PERPENDICOLARE AD UNA RETTA

Example 7 *Scrivere l'equazione del piano passante per P(1,2,-1) e perpendicolare alla retta di equazione* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

Soluzione E' sufficiente osservare che in un piano di equazione ax+by+cz+d=0 la terna (a,b,c) sono le componenti di un vettore ortogonale al piano. In questo caso affinchè il piano sia ortogonale alla retta è sufficiente che (a,b,c) siano uguali o proporzionali ai parametri direttori della retta, che nel nostro caso sono essendo data in forma parametrica sono (2,-1,3).

Il piano si specializza in 2x-y+3z+d=0, imponiamo che esso passa per P(1,2,-1) e otteniamo 2-2-3+d=0, da cui d=3. L'equazione del piano cercato è 2x-y+3z+3=0

Example 8 *Scrivere l'equazione del piano passante per P(0,1,-1) e perpendicolare alla retta di equazione* $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

Soluzione I parametri direttori della retta in forma cartesiana sono dati dai minori a segno alterno della seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice si costruisce mettendo come righe solo i coefficienti delle variabili x,y e z.

Si cancella la prima colonna e si calcola il determinante della matrice di ordine 2, il primo valore è l=-3
Si cancella la seconda colonna e si calcola il determinante della matrice di ordine 2, il secondo valore è m=-3 (ricorda a segno alterno!!!)

Si cancella la terza colonna e si calcola il determinante della matrice di ordine 2, il primo valore è n=1

A questo punto si procede come prima, l'equazione del piano si specializza in -3x-3y+z+d=0 si impone il passiaggio per P(0,1,-1) e si ottiene -3-1+d=0, da cui d=4. L'equazione del piano è 3x+3y-z-4=0

Exercise 5 *Scrivere l'equazione del piano passante per P(-2,0,1) e perpendicolare alla retta di equazione* $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Exercise 6 *Scrivere l'equazione del piano passante per P(-2,2,3) e perpendicolare alla retta di equazione* $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

0.6 RETTA PER UN PUNTO PARALLELA AD UN PIANO E ORTOGONALE AD UNA RETTA

Example 9 *Sia assegnato il punto P(0,0,1), la retta di equazione* $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ *e il piano* π *di equazione x+y+z=0. Determinare l'equazione della retta passante per P ortogonale a r e parallela al piano* π.

Soluzione La retta cercata per essere parallela al piano deve essere contenuta in un piano parallelo a quello assegnato e passante per P. Inoltre per essere ortogonale alla retta assegnata deve essere contenuta in un piano ortogonale alla retta data. In conclusione l'equazione della retta cercata è data dall'intersezione di due piani. Il primo α_1 è quello passante per P e parallelo a π e l'altro α_2 è quello passante per P e ortogonale alla retta r.

Piano α_1 $x + y + z + k = 0$, da cui imponendo il passiaggio per P si ha : k=-1, $x + y + z - 1 = 0$
Piano α_2 $2x - 2y - z + k = 0$, da cui imponendo il passiaggio per P si ha : k=1, $2x - 2y - z + 1 = 0$

La retta cercata ha equazione $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Exercise 7 *Sia assegnato il punto P(-1,0,1), la retta di equazione* $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ *e il piano* π *di equazione x-y+z+1=0. Determinare l'equazione della retta passante per P ortogonale a r e parallela al piano* π.

Exercise 8 *Sia assegnato il punto P(0,0,0), la retta di equazione* $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$ *e il piano* π *di equazione x+y+z+1=0. Determinare l'equazione della retta passante per P ortogonale a r e parallela al piano* π.

0.7

0.8 RETTE SGHEMBE

Due rette dello spazio sidicono sghembe se non esiste un piano che li contiene. Due rette che non sono sghembe si dicono complanari.

Vediamo come fare per controllare se due rette sono sghembe.

Example 10 *Verificare se le rette diequazioni r:*$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ *e s:*$\begin{cases} -z + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ *sono sghembe.*

I due sistemi ci permettono di scrivere una matrice 4x4, la seguente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ho scritto la matrice completa del sistema costituito dalle 4 equazioni. Se tale matrice ha determinante nullo allora le due rette sono complanari, se al contrario il determinante è non nullo le due rette sono sghembe. Nel nostro caso il determinante di M è –1 e quindi le rette assegnate sono sghembe.

Example 11 *Verificare se le rette diequazioni* $r:\begin{cases} x=1 \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases}$ *e* $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ *sono sghembe.*

Se le rette sono assegnate in forma parametrica, possiamo trasformarle in forma cartesiana e adottare il metodo precedente oppure determiniamo i parametri direttori di ciascuna di esse. Nel nostro caso r ha parametri direttori (0,-1,-1) e s ha parametri direttori (1,1,1). Poi consideriamo un punto arbitrario di r ottenendolo assegnato un qualsiasi valore a t, ad esempio per t=0 ottengo il punto A(1,0,1). Allo stesso modo mi consiero un punto qualsiasi su s, assegnando un valore a caso a t, anche quì conviene t=0 e quindi ottengo il punto B(1,0,0). Determino i parametri deretori del segmento AB che sono (0,0,1). A questo punto costruisco la matrice 3x3 mettendo come righe i parametri direttori di r,s e AB

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo il determinante e se viene diverso da zero posso dire che le rette sono sghembe, altrimenti sono complanari. Nel nostro caso tale detrminante vale 1 e quindi le rette in questione sono sghembe.

Remark 1 *Se una retta è assegnata in forma parametrica e l'altra in forma cartesiana allora una delle due la trasormate e poi adottate il metodo che ritenete più vantaggioso.*

Exercise 9 *Verificare se le seguenti rette sono sghembe r:*$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ *e s:*$\begin{cases} x-2y=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

Exercise 10 *Verificare se le seguenti rette sono sghembe* $r:\begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$ *e* $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$

Exercise 11 *Verificare se le seguenti rette sono sghembe* $r:\begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}$ *e* $s:\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x+1=0 \end{cases}$