

CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI TRE PUNTI

Nello spazio un punto è individuato da una terna ordinata di numeri $P(x,y,z)$. Assegnati tre punti come facciamo a verificare se essi stanno sulla stessa retta? Siano $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$ tre punti distinti, le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, analogamente le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.

Se i tre punti sono allineati ne segue che le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono proporzionali alle componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_3}$.

Questo si traduce algebricamente nella condizione che la seguente matrice abbia rango 1.

$$M = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

Example 1 *Verificare se i seguenti punti dello spazio sono allineati*

$$(i) \quad P_1 \equiv (1, 2, 3), P_2 \equiv (0, 1, 2), P_3 \equiv (-1, 0, 1)$$

$$(ii) \quad P_1 \equiv (-1, 0, 2), P_2 \equiv (2, 1, 0), P_3 \equiv (-4, 1, 4)$$

Soluzione(i) $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, questa matrice ha rango 1 e quindi la prima terna di punti è allineata.

Soluzione(ii) $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, questa matrice ha rango 2 e quindi la seconda terna di punti non è allineata.

Exercise 1 *Verificare se i seguenti punti dello spazio sono allineati*

$$P_1 \equiv (1, -1, 0), P_2 \equiv (2, 1, 2), P_3 \equiv (3, 1, 0)$$

$$P_1 \equiv (0, 1, 1), P_2 \equiv (1, 1, 1), P_3 \equiv (2, -1, 0)$$

$$P_1 \equiv (-1, 2, 2), P_2 \equiv (1, 0, 2), P_3 \equiv (2, 0, 2)$$