PIANO PER TRE PUNTI NON ALLINEATI

Nello spazio per tre punti non allineati passa un e un solo piano la cui equazione è del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con a,b e c non tutti nulli. Verificato che tre punti non sono allineati, vediamo come si determina l'equazione di tale piano.

Siano $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$ tre punti distinti, le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, analogamente le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.

Se i tre punti non sono allineati ne segue che le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ non sono proporzionali alle componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_3}$. Sia $P \equiv (x, y, z)$ un generico punto dello spazio, se esso appartiene al piano individuato dai tre punti vuol dire che le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P}$ che sono $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, dipendono linearmente dalle componenti di $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. Questo si traduce nella relazione che il seguente determinante sia nullo.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Example 1 *Scrivere l'equazione del piano passante per i seguenti tre punti non allineati*

$$P_1 \equiv (-1, 0, 2), P_2 \equiv (2, 1, 0), P_3 \equiv (-4, 1, 4)$$

$$\begin{vmatrix} x + 1 & y & z - 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dal calcolo del determinante risulta $4x + 6z - 8 = 0$

Exercise 1 *Scrivere l'equazione del piano passante per i seguenti tre punti non allineati*

$$P_1 \equiv (1, 2, 1), P_2 \equiv (2, 2, 1), P_3 \equiv (3, 1, 2)$$

$$P_1 \equiv (1, 0, 0), P_2 \equiv (1, 1, 1), P_3 \equiv (2, 1, -2)$$

$$P_1 \equiv (1, 0, 0), P_2 \equiv (0, 1, 0), P_3 \equiv (0, 0, 1)$$