RETTA PER DUE PUNTI DISTINTI

Un punto P del piano è individuato da una coppia ordinata (a,b) di numeri reali. Le rette sono descritte da equazioni non degeneri di primo grado in due variabili (non degeneri vuol dire che i coefficienti a e b non sono entrambi nulli).

$$P \equiv (x, y)$$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in R \text{ ; } a, b \text{ non entrambi nulli}$$

Remark 1 *Equazione della retta per due punti distinti.*

Siano $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ due punti distinti, le componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ sono (x_2-x_1, y_2-y_1). Un generico punto P$\equiv (x, y)$ appartiene alla retta P_1P_2 se le componenti del vettore $\overrightarrow{PP_1}$, che sono $(x-x_1, y-y_1)$, sono proporzionali alle componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$. Questa condizione si traduce nella seguente relazione:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Example 1 *Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1 \equiv (4, 3)$ e $P_2 \equiv (1, 5)$*

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + 3y - 17 = 0$

Example 2 *Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1 \equiv (4, 2)$ e $P_2 \equiv (2, 2)$*

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$y - 2 = 0$

Exercise 1 *Scrivere l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti:*

$$P_1 \equiv (2, 3) e P_2 \equiv (-2, 1)$$

$$P_1 \equiv (1, 2) e P_2 \equiv (1, -2)$$

$$P_1 \equiv (4, 3) e P_2 \equiv (1, 3)$$

Remark 2 *Sappiamo che l'equazione di una retta per due punti distinti si determina sviluppando il seguente calcolo:*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

La relazione precedente è equivalente alla seguente espressione: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Infatti, $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$ =Utilizzando le proprietà sui determinanti= $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix} =$

(Sviluppando Laplace utilizzando la terza colonna)$=-1\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0.$

Abbiamo così un altro modo per calcolare la retta per due punti. Vediamo questo metodo applicato all'esercizio precedente.

Example 3 *Scrivere l'equazione della retta passante per i punti* $P_1 \equiv (4,3)$ *e* $P_2 \equiv (1,5)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2x - 3y + 17 = 0$$

Osserviamo che abbiamo la stessa retta di prima anche se questa è $-2x - 3y + 17 = 0$, l'equazione di una retta è individuata a meno di una fattore di proporzionalità non nullo. Se $ax + by + c = 0$ rappresenta una retta, tutte le espressioni del tipo $\rho(ax + by + c) = 0$, con $\rho \neq 0$ rappresentano la stessa retta.

Exercise 2 *Scrivere con tale metodo l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti:*

$$P_1 \equiv (0,3) e P_2 \equiv (-2,0)$$

$$P_1 \equiv (1,2) e P_2 \equiv (1,0)$$

$$P_1 \equiv (-2,2) e P_2 \equiv (0,3)$$

Remark 3 *Per poter scrivere l'equazione di una retta sono sufficienti un punto e una direzione. Siano assegnati il punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ *e la direzione* (l, m)*. Il generico punto* $P \equiv (x, y)$ *si trova sulla retta per* P_0 *e di direzione* (l, m) *se le componenti del vettore* $\overrightarrow{PP_0}$*, che sono* $(x - x_0, y - y_0)$*, sono proporzionali alle componenti* (l, m)*. Questa condizione si traduce nella seguente relazione:*

$$(x - x_0, y - y_0) = t(l, m)$$

$$(x - x_0, y - y_0) = (tl, tm)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$$

l'ultima relazione esprime l'equazione di una retta in forma parametrica.

Poichè $(x - x_0, y - y_0)$ sono proporzionali alle componenti (l, m), per determinare l'equazione della retta possiamo calcolare anche il seguente determinante e imporlo uguale a 0.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

Example 4 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punti* $P_0 \equiv (-1, 2)$ *e di direzione* $(2, -1)$:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

se eliminiamo il parametro t è possibile passare dalla forma parametrica a quella cartesiana:
$$\begin{cases} t = 2 - y \\ x = -1 + 4 - 2y \end{cases}$$
in definitiva abbiamo l'equazione $x + 2y - 3 = 0$.

Example 5 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punti* $P_0 \equiv (2, -1)$ *e di direzione* $(0, 1)$:

$$\begin{cases} x = 2 + 0t \\ y = -1 - t \end{cases}$$

se eliminiamo il parametro t è possibile passare dalla forma parametrica a quella cartesiana. In questo caso $x - 2 = 0$ è la forma cartesiana della retta.

Exercise 3 *Scrivere l'equazione della retta passante per* $P_1 \equiv (2, 3)$ *e con direzione (1,0)*

Example 6 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punti* $P_0 \equiv (2, -3)$ *e di direzione* $(-3, 1)$:

Utilizziamo questa volta la seguente relazione: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ l & m \end{vmatrix} = 0$

si ha:
$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$x + 3y + 7 = 0$

Exercise 4 *Scrivere l'equazione della retta passante per il punti* $P_0 \equiv (1, 3)$ *e di direzione* $(3, 1)$.