FASCIO PROPRIO E IMPROPRIO DI RETTE

Nel piano cartesiano se due rette sono distinte, allora si presenta una e una sola delle seguenti possibilità:

1. Sono incidenti in un punto
2. Sono parallele (eventualmente coincidenti)

Due rette distinte che si intersecano in un punto individuano un insieme di rette, che si chiama fascio proprio di rette ed è costituito da tutte le rette che passano per il loro punto di intersezione; il punto comune alle rette si dice centro del fascio.

Le rette $2x - y + 3 = 0$ e $3x + 2y + 4 = 0$, sono distinte e sono incidenti e quindi individuano un fascio proprio. Il centro del fascio si determina risolvendo il sistema costituito dalle due equazioni.

La seguente espressione:

$$\lambda(2x - y + 3) + \mu(3x + 2y + 4) = 0$$

rappresenta il fascio proprio individuato dalle due rette. Al variare di λ e μ in R otteniamo tutte le rette passanti per il centro del fascio. Per $\lambda = 1$ e $\mu = 0$ otteniamo la retta $2x - y + 3 = 0$, $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ otteniamo la retta $3x + 2y + 4 = 0$. Spesso il fascio proprio individuato dalle due rette viene scritto nel seguente modo:

$$2x - y + 3 + \mu(3x + 2y + 4) = 0$$

L'ultima relazione individua tutte le rette del fascio esclusa $3x + 2y + 4 = 0$ che non può essere ottenuta per nessun valore di μ.

Le rette $3x + 2y - 2 = 0$ e $3x + 2y + 4 = 0$ sono distinte e parallele, quindi individuano un fascio improprio. In questo caso il fascio improprio è individuato dalla seguente relazione:

$$3x + 2y + k = 0$$

Al variare di k in R otteniamo tutte rette tra di loro parallele.

Prima di vedere l'esercizio svolto facciamo la seguente osservazione che ci sarà utile nel seguito:

Remark 1 *Siano assegnate le rette di equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.*

Le due rette sono parallelle $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

Le due rette sono perpendicolari $\Longleftrightarrow (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = 0$

0.1 ESERCIZIO SVOLTO

Assegnati i punti di coordinate $P_1 \equiv (-3, 8)$ e $P_2 \equiv (6, -4)$, rispondere ai seguenti quesiti:

(a) Scivere l'equazione della retta per i punti P_1 e P_2

(b) Assegnata la retta di equazione 4x-y+4=0, scrivere l'equazione del fascio F determinato da essa e dalla retta al punto (a).

Nel fascio F determinare:

(i) Le rette parallele agli assi cartesiani.

(ii) La retta S parallela alla retta di equazione x+y+1=0

(iii) La retta R perpendicolare alla retta di equazione 2x+y+2=0.

(iv) La retta passante per il punto comune alle due rette: $\begin{cases} 2x - 3y - 3 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

(v) La retta che stacca sull'asse x a partire dall'origine un segmento di lunghezza L=+3.

(vi) La retta che stacca sull'asse y a partire dall'origine un segmento di lunghezza L=+2.
(vii) La retta che passa per l'origine.

0.1.1 SOLUZIONE

(a) Per scivere l'equazione della retta utilizziamo la seguente relazione:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi nel nostro caso si ha:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-8 \\ 9 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

l' equazione della retta è $4x+3y-12=0$.
(b) L'equazione del fascio F è il seguente:

$$4x-y+4+\lambda(4x+3y-12)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$F: 4(\lambda+1)x+(3\lambda-1)y+4(1-3\lambda)=0$$

(i) La retta del fascio parallella all'asse x (che ha equazione $y=0$) si ottiene imponendo la condizione:

$$\begin{vmatrix} 4(\lambda+1) & (3\lambda-1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(\lambda+1)=0 \Longleftrightarrow \lambda=-1$$

sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene la retta cercata $y=4$.
La retta del fascio parallella all'asse y (che ha equazione $x=0$) si ottiene imponendo la condizione: $\begin{vmatrix} 4(\lambda+1) & (3\lambda-1) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$-(3\lambda-1)=0 \Longleftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$$

sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene la retta cercata $x=0$ (asse y)
(ii) la retta S parallela alla retta di equazione $x+y+1=0$ si ottiene imponendo la seguente condizione (vedi le osservazioni fatte prima di proporre l'esercizio): $\begin{vmatrix} 4(\lambda+1) & 3\lambda-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$4\lambda+4-3\lambda+1=0 \Longleftrightarrow \lambda=-5$$

Infatti, per $\lambda=-5$ la retta del fascio diventa $x+y+4=0$ che è parallela alla retta $x+y+1=0$.

(iii) la retta R perpendicolare alla retta di equazione $2x+y+2=0$ si ottiene imponendo la seguente condizione (vedi le osservazioni fatte prima di proporre l'esercizio):

$$4(\lambda+1)2+(3\lambda-1)1=0 \Longleftrightarrow 8\lambda+8+3\lambda-1=0 \Longleftrightarrow \lambda=-\frac{7}{11}$$

Infatti, per $\lambda=-\frac{7}{11}$ la retta del fascio diventa $x-2y+8=0$ che è perpendicolare a $2x+y+2=0$.

(iv) Determiniamo prima il punto di intersezione tra le due rette: $\begin{cases} 2x-3y-3=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$,tale sistema ammette la soluzione P$\equiv (3,1)$.
Ora imponiamo la condizione di passaggio della generica retta del fascio F per il punto P$\equiv (3,1)$.
Si ottiene la seguente relazione:

$$12+12\lambda+3\lambda-1+4-12\lambda=0 \Longleftrightarrow \lambda=-5$$

L'equazione della retta si ottiene così sostituendo il valore $\lambda=-5$ nell'equazione del fascio:

$$x+y-4=0$$

(v) Determiniamo il punto di intersezione tra le rette del fascio e l'asse x (che ha equazione $y=0$), dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$\begin{cases} 4(\lambda+1)x+(3\lambda-1)y+4(1-3\lambda)=0 \\ y=0 \end{cases}$ $x=\dfrac{3\lambda+1}{\lambda+1}$, imponiamo la seguente condizione:

$$\frac{3\lambda+1}{\lambda+1}=3 \Longleftrightarrow 3\lambda+1=3\lambda+3, \text{ con } \lambda\neq-1 \text{ , relazione assurda}$$

Questo vuol dire che la retta che soddisfa la condizione è la seconda retta del fascio:

$$4x+3y-12=0$$

(vi) Determiniamo il punto di intersezione tra le rette del fascio e l'asse x (che ha equazione $y=0$), dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$\begin{cases} 4(\lambda+1)x+(3\lambda-1)y+4(1-3\lambda)=0 \\ y=0 \end{cases}$ $x=\dfrac{3\lambda-1}{\lambda+1}$, imponiamo la seguente condizione:

$$\frac{3\lambda-1}{\lambda+1}=2 \Longleftrightarrow 3\lambda-1=2\lambda+2, \text{ con } \lambda\neq-1 \Longleftrightarrow \text{e } \lambda=3$$

Questo vuol dire che la retta che soddisfa la condizione è: $2x+y-4=0$

(vii) Dobbiamo imporre la condizione che il termine noto delle rette del fascio sia nullo:

$$4(1-3\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$$

Questo vuol dire che la retta che soddisfa la condizione è: $x=0$