Diagonalizzazione di un endomorfismo

10 Dicembre 2002

F. FERNICOLA Name ______________________________

ENDOMORFISMI DIAGONALIZZABILI

Exercise 0.1 *Assegnato il seguente endomorfismo di R^3:*

$$\begin{aligned} f &: R^3 \longrightarrow R^3 \\ f(x,y,z) &= (-2z, -x+y-2z, x+3z) \end{aligned}$$

(a) Determinare la matrice rappresentativa A_f nella seguente base:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

(b) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile; in caso affermativo determinare una base di autovettori e la matrice P che diagonalizza A_f.

Soluzione

1^0 passo

Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:
$f(1,0,0) = (0,-1,1)$;
$f(0,1,0) = (0,1,0)$;
$f(0,0,1) = (-2,-2,3)$;

2^0 passo

Ci chiediamo quali sono le componenti di queste immagini nella base B:
$(0,-1,1) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$
$(0,1,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$
$(-2,-2,3) = -2(1,0,0) - 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$
Osserviamo che in questo caso le componenti coincidono con i vettori immagine (perchè la base è quella canonica!)

3^0 passo

La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne le componenti dei vettori immagine:
$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e il punto (a) è risolto.

4^0 passo

Per rispondere al punto (b), determiniamo il polinomio caratteristico:
Ponendo M=(A_f-λI)=$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |M| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

[Per calcolare il determinante ho utilizzato la regola di Sarrus]

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2, invece l'autovalore 2 è una radice semplice.

5^0 passo

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x + 0y + -2z = 0 \\ -x + 0y + -2z = 0 \\ x - 0y + 2z = 0 \end{cases}$
Questo sistema è banalmente equivalente all'unica equazione: $x + 2z = 0$.
La soluzione è: x=-2z, y e z sono le variabili libere. $V_1 = \{(-2z, y, z)$ con y,z $\in R\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (0,1,0)$ e $u_2 = (-2,0,1)$, quindi $V_1 = \langle(0,1,0),(-2,0,1)\rangle$

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=1 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni).

L'autospazio ha dimensione 2, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 2 e la sua molteplicità algebrica è 2). A questo punto già sappiamo che l'endomorfismo è diagonalizzabile perchè l'altro autovalore essendo radice semplice è anche regolare.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 2$, si ha:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono: x=-z, y=-z e z è la variabile libera. $V_2 = \{(-z, -z, z) \text{ con z} \in R\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (-1, -1, 1)$, quindi $V_2 = \langle(-1, -1, 1)\rangle$

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=2 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni).

L'autospazio ha dimensione 1, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 1 e la sua molteplicità algebrica è 1).

6^0 passo

La matrice diagonalizzante la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_f P = D$ dove D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP =: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercise 0.2 *Assegnato il seguente endomorfismo di* R^3*:*

$$\begin{aligned} f &: R^3 \longrightarrow R^3 \\ f(x, y, z) &= (-4x + y + z, -4x + y + 2z, 2x - 2y + 3z) \end{aligned}$$

(a) Determinare la matrice rappresentativa A_f nella seguente base:

$$B = \{(0, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 2)\}$$

(b) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile; in caso affermativo determinare una base di autovettori e la matrice P che diagonalizza A_f.

Soluzione

1^0 passo

Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:

$f(0, 0, 1) = (1, 2, 3);$

$f(1, 2, 1) = (-1, 0, 1);$

$f(1, 3, 2) = (1, 3, 2);$

2^0 passo

Ci chiediamo quali sono le componenti di queste immagini nella base B:

$(1, 2, 3) = 2(0, 0, 1) + 1(1, 2, 1) + 0(1, 3, 2)$

$(-1, 0, 1) = 0(0, 0, 1) - 3(1, 2, 1) + 2(1, 3, 2)$

$(1, 3, 2) = 0(0, 0, 1) + 0(1, 2, 1) + 1(1, 3, 2)$

Osserviamo che in questo caso le componenti non coincidono con i vettori immagine (perchè la base *non è quella canonica*!)

3^0 passo

La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne le componenti dei vettori immagine:

$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e il punto (a) è risolto.

4^0 passo

Per rispondere al punto (b), determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo M= $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |M| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

[Per calcolare il determinante ho utilizzato la regola di Laplace fissando la prima riga]

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Gli autovalori sono reali e distinti, possiamo già concludere che l'endomorfismo è diagonalizzabile.

5^0 passo

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = -3$.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = -3$, si ha:

$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 0y + 0z = 0 \\ x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

La soluzione è: x=0, y=-2z e z è la variabile libera. $V_{-3} = \{(0, -2z, z)$ con z $\in R\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_1 = (0, -2, 1)$, quindi $V_{-3} = \langle(0, -2, 1)\rangle$

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=2 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni).

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = 1$.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = 1$, si ha:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x - 4y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono: x=0, y=0 e z è la variabile libera. $V_1 = \{(0, 0, z)$ con z $\in R\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_2 = (0, 0, 1)$, quindi $V_1 = \langle(0, 0, 1)\rangle$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 2$.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 2$, si ha:

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ x - 5y + 0z = 0 \\ 0x + 2y - z = 0 \end{cases}$

Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono: x=5y, z=2y e y è la variabile libera. $V_2 = \{(5y, y, 2y)$ con y $\in R\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (5, 1, 2)$, quindi $V_2 = \langle(5, 1, 2)\rangle$

6^0 passo

La matrice diagonalizzante la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.
E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_fP = D$ dove D$=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP =: \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Per essere più espliciti consideriamo l'autospazio V_{-3} del secondo esercizio, un suo elemento è ad esempio la terna u=(0,-2,1) e tale elemento non è un autovettore di autovalore -3, infatti si ha:

$$f(0,-2,1) = (-1,0,7) \neq -3(0,-2,1)$$

Osserviamo che il vettore:

$$(**) \qquad \underline{(-1,-1,0)} = 0(0,0,1) - 2(1,2,1) + 1(1,3,2)$$

è un autovettore di autovalore -3, infatti:

$$f(-1,-1,0) = (3,3,0) = -3(-1,-1,0)$$

Sempre in riferimento all'endomorfismo del secondo esercizio, ad esempio se vogliamo un autovettore di autovalore 2 dobbiamo considerare un terna dell'insieme V_2 e applicare il procedimento di (**):
$(-5,-1,-2) \in V_2$, allora $\underline{(-3,-8,-10)} = -5(0,0,1) - 1(1,2,1) - 2(1,3,2)$ è un autovettore.
(Osserviamo che la base scelta nel secondo esercizio non è quella standard!).

COSA ACCADE SE LA BASE E' QUELLA CANONICA?

Nel primo esercizio la base scelta è quella canonica, se volessimo determinare un autovettore dovremmo applicare il procedimento appena descritto. In questo caso la particolarità della base semplifica notevolmente le cose e ci permette di determinare rapidamente gli autovettori. In riferimento all'endomorfismo del primo esercizio, ad esempio se vogliamo un autovettore di autovalore 1 dobbiamo considerare un terna dell'insieme V_1 e applicare il procedimento (**):
$(-2,0,1) \in V_1$, allora $\underline{(-2,0,1)} = -2(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$ è un autovettore.
Senza far entrare in gioco la nozione di isomorfismo, possiamo dire che quando la base è quella canonica gli autovettori "coincidono" con gli elementi dei V_λ. ATTENZIONE quando la base non è quella canonica!