ENDOMORFISMI NON DIAGONALIZZABILI

Exercise 1 *Assegnato il seguente endomorfismo di* R^3*:*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad R^3 \longrightarrow R^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (x+2y, y+2z, 2z) \end{aligned}$$

(a) Determinare la matrice rappresentativa A_f nella seguente base:

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

(b) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile

Soluzione

1^0 passo

Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:
$f(1,0,0) = (1,0,0)$;
$f(0,1,0) = (2,1,0)$;
$f(0,0,1) = (0,2,2)$;

2^0 passo

Ci chiediamo quali sono le componenti di queste immagini nella base B?

Osserviamo che in questo caso le componenti coincidono con i vettori immagine (perchè la base è quella canonica!)

3^0 passo

La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne le componenti dei vettori immagine. In questo caso poichè la base è quella canonica le componenti coincidono proprio con i vettori immagine.

$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e il punto (a) è risolto.

4^0 passo

Per rispondere al punto (b), determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo M= $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |M| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

Osserviamo che in questo caso il determinante è il prodotto degli elementi della diagonale principale in quanto la matrice è triangolare superiore.

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2, invece l'autovalore 2 è una radice semplice. Conviene sempre determinare prima l'autospazio associato all'autovalore che ha molteplicità algebrica maggiore di 1, questo perchè già sappiamo che le radici semplici ci forniscono sempre un autospazio di dimensione 1.

5^0 passo

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, si ha:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La soluzione è: y=0, z=0 e x variabile libera. $V_1 = \{(x, 0, 0)$ con x $\in R\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (1, 0, 0)$. La dimensione dell'autospazio è 1 e quindi l'autovalore non è regolare e concludiamo che l'endomorfismo in questione non è diagonalizzabile.

Ricordo che un autovalore si dice regolare se la dimensione dell'autospazio associato è uguale alla sua molteplicità algebrica.

Ricordate che affinchè un endomorfismo sia diagonalizzabile in R tutte le sue radici devono essere reali e ciascuna deve avere molteplicità algebrica coincidente con quella geometrica.

Exercise 2 *Assegnato il seguente endomorfismo di R^3:*

$$\begin{aligned} f &: R^3 \longrightarrow R^3 \\ f(x, y, z) &= (x - y + z, -x + y + z, -2x + z) \end{aligned}$$

(a) Determinare la matrice rappresentativa A_f nella seguente base:

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

(b) Dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile; in caso affermativo determinare una base di autovettori e la matrice P che diagonalizza A_f.

Soluzione

1^0 passo

Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:

$f(1, 0, 0) = (1, -1, -2)$;
$f(0, 1, 1) = (0, 2, 1)$;
$f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$;

2^0 passo

Ci chiediamo quali sono le componenti di queste immagini nella base B? Osserviamo che in questo caso la base non è quella canonica!!

(*) $(1, -1, -2) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1)$

(**) $(0, 2, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1)$

(***) $(1, 1, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1)$

Ciascuna delle relazioni scritte mi fornisce un sistema in tre variabili le cui soluzioni saranno le componenti dei vettori immagine e costituiranno le colonne della matrice che rappresenta l'endomorfismo.
La (*) fornisce come soluzioni la terna (1,-1,-1)
La (**) ha come soluzioni la terna (0,2,-1)
Infine la (***) ha come soluzione (1,1,0)
3^0 passo
La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne le componenti dei vettori immagine.
$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e il punto (a) è risolto.
4^0 passo
Per rispondere al punto (b), determiniamo il polinomio caratteristico:
Ponendo M= $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |M| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Con la regola di Ruffini si scompone in $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 2)$
In questo caso dobbiamo trovare le radici della seguente equazione $(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$
Una radice è $\lambda_1 = 2$ e le altre sono complesse $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$ $\lambda_3 = \dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$.

Sappiamo che condizione necessaria affinchè un endomorfismo sia diagonalizzabile in R è che le radaci siano tutte reali. In questo caso
poichè ci sono radici complesse possiamo concludere che l'endomorfismo non è diagonalizzabile in R. Attenzione perchè anche se gli autovalori sono tutti reali potrebbe essere non diagonalizzabile (vedi esempio precedente). La condizione che gli autovalori siano tutti reali è necessaria ma non sufficiente per la diagonalizzabilità in R