Diagonalizzazione di una matrice quadrata

20 Febbraio 2001

Author F. FERNICOLA Name ______________________

DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI

In tutta la trattazione supporemo che le matrici siano sul campo reale e ci poniamo la questione della diagonalizzazione in R.

Siano A e B due matrici quadrate di ordine n$\geq$ 2, si introduce la seguente:

Definition 1 *A e B si dicono simili e scriveremo $A \backsim B$, se e solo se esiste una matrice invertibile P tale che*

$$P^{-1}AP = B$$

Example 2 *Si considerino le seguenti matrici quadrate del 2^0 ordine:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

è semplice verificare che $P^{-1}AP = B$ dove P=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $A \backsim B$.

Example 3 *Si considerino le seguenti matrici quadrate del 3^0 ordine:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -12 & -15 & 42 \\ 6 & 8 & -22 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

è semplice verificare che $P^{-1}AP = B$ dove P=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, quindi $A \backsim B$.

Ora introduciamo la seguente:

Definition 4 *Una matrice A si dice <u>diagonalizzabile</u> se $A \backsim D$, con D matrice diagonale. In altre parole A è diagonalizzabile se esiste una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tale che vale la seguente relazione:*

$$P^{-1}AP = D$$

Example 5 *Si considei la seguente matrice quadrate del 2^0 ordine:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A è diagonalizzabile, perchè esiste la matrice $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e la matrice P=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$tale che:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ci occuperemo dei seguenti problemi:

(P_1) Quando una matrice quadrata A è diagonalizzabile?
(P_2) Nel caso che lo sia, determinare la matrice P e D.

Per meglio inquadrare il problema, ragioniamo con una matrice quadrata del 2^0ordine.

Sia assegnata la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e supponiamo che essa sia diagonalizzabile, allora esiste una matrice diagonale D= $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e una matrice invertibile P= $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$tale che vale la seguente relazione:

$$P^{-1}AP = D$$

$$\Updownarrow$$

$$AP = PD$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 & a_{11}x_2 + a_{12}y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 & a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che questa uguaglianza tra matrici da luogo ai seguenti sistemi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 = \lambda_1 x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 = \lambda_1 y_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 = \lambda_2 x_2 \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(1) \begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{e } (2) \begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 = 0 \\ a_{21}x_2 + (a_{22} - \lambda_2)y_2 = 0 \end{cases}$$

I due sistemi sono omogenei e costituiti da due equazioni in due incognite. Sappiamo che essi ammettono come soluzione almeno quella nulla. E' anche vero che le soluzioni dei due sistemi costituiranno le colonne della matrice P, che deve essere invertibile; questo vuol dire che non possiamo accettare le soluzioni banali (soluzioni nulle) del sistema (altrimenti la matrice P avrebbe determinante nullo e non sarebbe invertibile).

A parte gli indici, entrambi i sistemi sono del tipo:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22}-\lambda_1)y = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che un sistema omogeneo di due equazioni in due variabili ha soluzioni non nulle se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è minore di due. Nel caso specifico la matrice dei coefficienti è la seguente:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

Il rango di M è minore di due se e solo se il suo detrminante è nullo, in sintesi deve essere:

$$|M| = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12} = 0$$

Osserviamo che il determinante di M è un polinomio di 2^0 grado in λ che indicheremo con $p(\lambda)$, sara:

$$p(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12}$$

Il polinomio $p(\lambda)$ è detto <u>polinomio caratteristico</u> e le radici del polinomio caratteristico si dicono <u>autovalori</u>. In corrispondenza a ciascun autovalore λ, il sistema ammetterà soluzioni (essendo soluzioni di un sistema omogeneo esse costituiranno un sottospazio di R^2 che indicheremo con V_λ e si dirà <u>autospazio</u>) non banali e tali soluzioni si dicono <u>autovettori</u> di autovalore λ.

Remark 1 *Il ragionamento fatto nel caso n=2 può ripetersi formalmente per un n arbitrario.*

I prossimi risultati che esporremo sono utili perchè ci condurranno alla soluzione dei due problemi posti inizialmente.

Definition 6 *Si dice che una <u>radice</u> λ del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ ha <u>molteplicità algebrica</u> α, se $p(\lambda)$ ammette α radici tutte uguali a λ. Una radice λ si dice semplice $\alpha = 1$. La molteplicità algebrica di λ si indica anche con $m_a(\lambda)$.*

Example 7 *Consireriamo il polinonìmio $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$, allora $\lambda = 1$ è una radice del polinomio di molteplicità $\alpha = 2$ e $\lambda = -1$ è una radice di molteplicità $\alpha = 1$ e quindi semplice.*

Proposition 8 Definition 9 *Si dice <u>molteplicità geometrica</u> di λ e si indica con $m_g(\lambda)$ la dimensione del sottospazio soluzione V_λ del sistema omogeneo associato.*

Proposition 10 *Se λ è un autovalore allora $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$. La molteplicità geometrica associata all'autovalore λ è sempre maggiore uguale di 1 ed è minore o uguale della sua molteplicità algebrica.*

Definition 11 *Una* <u>*radice*</u> λ *del polinomio caratteristico* $p(\lambda)$ *si dice* <u>*regolare*</u> *se* $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$, *ovvero la sua molteplicità geometrica coincide con la dimensione dell'autospazio* V_λ.

Le prossime proposizioni sono interessanti

Proposition 12 *Autovettori che appartengono ad autospazi distinti sono indipendenti.*

Proposition 13 *A è diagonalizzabile se e solo se ogni autovalore è reale e regolare.*

Corollary 14 *Con una matrice A di ordine n si costruisce un polinomio caratteristico di ordine n. Se tutte le radici sono semplici allora A è diagonalizzabile.*

ESERCIZI

Exercise 0.1 *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile?*

Sol.
Calcoliamo gli autovalori del polinomio caratteristico (radici del polinomio caratteristico):

$$M = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 12 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + 8 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 2\sqrt{2}i$ e $\lambda_2 = -2\sqrt{2}i$
Gli autovalori non sono reali, concludiamo che A non è diagonalizzabile.

Exercise 0.2 *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile?*

Sol.
Calcoliamo gli autovalori:

$$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$
Abbiamo un autovalore di moleplicità algebrica $\alpha = 2$.
Dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$
Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 0y = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_1 = \{(0, y) \text{ con y} \in R\}$.
(Osserviamo che la matrice M ha rango r=1 e le variabili sono n=2, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni).
L'autospazio ha dimensione 1, l'autovalore non è regolare (la dimensione dell'autospazio è 1 e la sua molteplicità algebrica è 2), concludiamo che la matrice A non è diagonalizzabile.

Exercise 0.3 *Dire se la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice diagonalizzante.*

Sol.

$$M = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$

Ciascun autovalore ha moleplicità algebrica $\alpha = 1$. A questo punto in forza di un Corollario precedente possiamo già concludere che A è diagonalizzabile. Calcoliamo la dimensione degli autospazi corrispondenti agli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = 1$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_1 = \{(x, x) \text{ con x} \in R\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=1 e le variabili sono n=2, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni).

L'autospazio ha dimensione 1, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 1 e la sua molteplicità algebrica è 1).

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = 4$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_4 = \{(-2y, y) \text{ con y} \in R\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=1 e le variabili sono n=2, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni).

L'autospazio ha dimensione 1, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 1 e la sua molteplicità algebrica è 1).

Entrambi gli autovalori sono regolari e nel campo reale, concludiamo che la matrice A è diagonalizzabile.

Una matrice che diagonalizza la A è la seguente:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P_1 si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativo a ciascun autospazio, infatti la prima colonna di P_1 ovvero il vettore (1,1) si ottiene dall'autospazio V_1 per x=1. Allo stesso modo, la seconda colonna (-2,1) si ottiene dall'autospazio V_4 per y=1.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

La matrice P_1 non è affatto unica, infatti basi distinte di autovettori danno luogo a matrici distinte.

Un'altra matrice è la seguente:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La prima colonna di P_2 ovvero il vettore (2,2) si ottiene dall'autospazio V_1 per x=2. Allo stesso modo, la seconda colonna (4,-2) si ottiene dall'autospazio V_4 per y=-2.

Una qualsiasi delle matrici costruite come indicato nei passi precedenti si dice matrice diagonalizzante. E' facile verificare che per una di esse vale la seguente relazione:
$P^{-1}AP = D$ dove D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice D ha sulla diagonale principale i corrispondenti autovalori.

Exercise 0.4 *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile?*

Sol.

$$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - 2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 4) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{3-\sqrt{7}i}{2}$
Gli autovalori non sono reali, concludiamo che A non è diagonalizzabile.

Exercise 0.5 *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile?*

Sol.

$$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2 + \lambda = 0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 0 \Longleftrightarrow (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda\right] = 0 \Longleftrightarrow \lambda(2-\lambda)(\lambda-2) = 0$
$\Longleftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 2$
Abbiamo un autovalore di moleplicità algebrica $\alpha = 2$.
Dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 2$
Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 2$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ x = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_2 = \{(0, y, 0)$ con y $\in R\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=2 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni).

L'autospazio ha dimensione 1, l'autovalore non è regolare (la dimensione dell'autospazio è 1 e la sua molteplicità algebrica è 2), concludiamo che la matrice non è diagonalizzabile.

Exercise 0.6 *Dire se la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice diagonalizzante.*

Sol.

$$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$

Abbiamo un autovalore di moleplicità algebrica $\alpha = 2$.

Dobbiamo calcolare la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$, si ha:

$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow V_1 = \{(y-z,y,z)$ con y,z $\in R\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=1 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni).

L'autospazio ha dimensione 2, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 2 e la sua molteplicità algebrica è 2).

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 2$, si ha:

$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x=0 \\ -y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Longrightarrow V_2 = \{(0,0,z)$ con z $\in R\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=2 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni).

L'autospazio ha dimensione 1, l'autovalore è regolare (la dimensione dell'autospazio è 1 e la sua molteplicità algebrica è 1).

Una matrice diagonalizzante è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativo a ciascun autospazio, infatti la prima colonna di P ovvero il vettore (-1,0,1) si ottiene dall'autospazio V_1 per y=0 e z=1; la seconda colonna (1,1,0) si ottiene da V_1 per y=1 e z=0 (osserviamo che (-1,0,1) e (1,1,0) è una base di V_1) . Allo stesso modo, la terza colonna (0,0,1) si ottiene dall'autospazio V_2 per z=1.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}AP = D$ dove D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP =: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercise 0.7 *Dire se la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice diagonalizzante.*

Sol.

$$M = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$

Ogni autovalore è semplice, allora A è diagonalizzabile. Dobbiamo calcolare una base per ciascun autospazio.

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = -1$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_{-1} =$ $\left\{(x, -\frac{2}{3}x, 0) \text{ con x} \in R\right\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=2 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni).

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = 2$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_2 =$ $\left\{(0, y, 0) \text{ con y} \in R\right\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=2 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni).

Utilizzando la matrice M, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 1$, si ha:
$M = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_1 =$ $\left\{(x, -4x, 2x) \text{ con x} \in R\right\}$.

(Osserviamo che la matrice M ha rango r=2 e le variabili sono n=3, quindi $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni)

Una matrice diagonalizzante è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativo a ciascun autospazio, infatti la prima colonna di P ovvero il vettore (3,-2,0) si ottiene dall'autospazio V_{-1} per x=3; la seconda colonna (0,1,0) si ottiene da V_2 per y=1. Allo stesso modo, la terza colonna (1,-4,2) si ottiene dall'autospazio V_1 per x=1.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}AP = D$ dove D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$