VERIFICA DELLA LINEARITA' DI UN'APPLICAZIONE

Example *Verificare quali delle seguenti applicazioni sono lineari*:

$$(i) \qquad f(x,y) = (2x, x+y, x-y-1)$$
$$(ii) \qquad f(x,y,z) = (x, xy, x+y)$$
$$(iii) \qquad f(x,y) = (x-y, x+y)$$

Soluzione (i) Ricordiamo che un'applicazione lineare trasforma sempre il vettore nullo nel vettore nullo. In questo caso si ha:

f(0,0)=(0,0,-1) quindi possiamo concludere che f non è un'applicazione lineare

Soluzion(ii) In questo caso il vettore nullo è trasformato nel vettore nullo perchè f(0,0,0)=(0,0) però al momento non possiamo dire nulla perchè questa condizione è necessaria ma in generale non è sufficiente. Ricordiamo che un'applicazione per essere lineare deve conservare le operazioni di somma interna e prodotto esterno. In questo caso prendiamo i vettori

u=(1,1,1), v=(2,0,0) e consideriamo u+v=(3,1,1)

E proviamo che non conserva la somma, infatti

f(u)=(1,1,2) f(v)=(2,0,2) f(u+v)=(3,3,4) e quindi risulta quindi $f(u+v) \neq f(u)+f(v)$

perchè (3,3,4)$\neq (1,1,2)+(2,0,2)$. Questo è sufficiente per dire che f non è lineare.

Soluzione (iii) Il vettore nullo è trasformato nel vettore nullo. Diciamo che questa verifica la facciamo per sperare che ciò non accada e quindi possiamo concludere che l'applicazione non è lineare. Se l'applicazione è lineare tale verifica non ha nessun valore ai fini della dimostrazione che l'applicazione sia lineare.

In questo caso consideriamo due vettori di R^2 $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$$f(u+v) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = \big((x_1+x_2)-(y_1+y_2),\ (x_1+x_2)+(y_1+y_2)\big) =$$
$$=\big((x_1-y_1)+(x_2-y_2),\ (x_1+y_1)+(x_2+y_2)\big) =$$
$$=\big(x_1-y_1,\ x_1+y_1\big) + \big(x_2-y_2,\ x_2+y_2\big) = f(u)+f(v)$$

Quindi l'applicazione conserva la somma interna

Sia $\alpha \in R$ e $u = (x,y)$ un vettore arbitrario di R^2

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - \alpha y, \alpha x + \alpha y) = \alpha(x - y, x + y) = \alpha f(u).$$

Conserva anche l'operazione esterna e quindi trattasi di un'applicazione lineare.

Diciamo che un'applicazione tra spazi vettoriali numerici per essere lineare deve accadere che le sue componenti devono essere polinomi di primo grado in più variabili mancanti di termine noto.

Exercise *Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari*

$$\begin{aligned} (i)\ f: R^3 \to R^3 \qquad & f(x,y,z) = (x, xy + 1, x - y) \\ (ii)\ f: R^2 \to R^3 \qquad & f(x,y) = (x^2, x, x + y) \\ (iii)\ f: R^3 \to R^3 \qquad & f(x,y,z) = (x + y, y, z) \end{aligned}$$