NUCLEO E IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

Example 1 *Sia assegnata la seguente applicazione lineare*

$$(i) \qquad f:\ R^4 \longrightarrow R^3 \qquad f(x,y,z,t) = (x+2y+z-t, x+y-z, y+2z-t)$$

(a) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{er}f$ e $\mathrm{Im}\,f$

Soluzione Ricordiamo che Kerf=$\{(x,y,z,t)|\ f(x,y,z,t) = (0,0,0)\} =$
$= \{(x,y,z,t)|\ (x+2y+z-t, x+y-z, y+2z-t) = (0,0,0)\}$. Quindi per determinare Kerf dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z-t=0 \\ x+y-z=0 \\ y+2z-t=0 \end{cases}$$

Questo è un sistema omogeneo e quindi compatibile che possiamo risolvere con Cramer. Scriviamo la matrice dei coefficienti:

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dobbiamo calcolare il rango di tale matrice.

Il minore costituito dalle prime due righe e dalle prime due colonne M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinate -1 e quindi non nullo. Possiamo dire che il rango è almeno 2, orliamo tale minore con la terza riga e terza colonna.

Otteniamo il seguente minore $\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, sfortunatamente tale determinante è nullo. Orliamo M con la terza riga e quarta colonna, costruendo il minore $\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, anche questo determinante è nullo e quindi la matrice A ha rango 2.

Osserviamo che la terza riga è data dalla differenza tra la prima e la seconda e quindi potevamo concludere subito, avendo trovato un minore di ordine 2 con determinante diverso da zero, che tale matrice aveva rango 2.

Quando non risulta evidente che qualche linea è combinazione lineare di altre bisogna proseguire orlando qualche minore con determinante non nullo.

Riscriviamo ora il sistema equivalente con z e t variabile libere

$$\begin{cases} x+2y+z-t=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=-z+t \\ x+y=z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z+t & 2 \\ z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3z+t}{-1} = 3z-t \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z+t \\ 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2z-t}{-1} = -2z+t$$

Le soluzioni sono Kerf=$\{(3z-t, -2z+t, z, t) \quad z,t \in R\}$. Osserviamo che la quaterna

$(3z-t, -2z+t, z, t) = (3z, -2z, z, 0) + (-t, t, 0, t) = z(3,-2,1,0) + t(-1,1,0,1)$. Quindi i vettori $(3,-2,1,0)$ e $(-1,1,0,1)$ costituiscono una base del nucleo che ha dimensione 2.

Dalla matrice A del sistema possiamo dedurre una base e la dimensione dell'immagine. Iniziamo col dire che la dimesione dell'immagine è data dal rango della matrice A e quindi nel nostro caso l'immagine avrà dimensione 2. Per prendere una base dell'immagine basta estrarre da A i vettori colonna che appartengono al minore di ordine massimo con detrminante non nullo estraibile da A.

Nel nostro caso poiche il rango di A è 2 possiamo considerare i primi due vettori colonna (1,1,0) e (2,1,1), che come ho detto, appartengono a un minore di ordine massimo con determinante non nullo estraibile da A.

Exercise 1 *Siano assegnate le seguenti applicazioni lineari*

$$(i) \qquad f: R^2 \longrightarrow R^3 \qquad f(x,y) = (x+y, 2x+y, x)$$

$$(ii) \qquad f: R^3 \longrightarrow R^3 \qquad f(x,y,z) = (x+y+z, x+y, x)$$

(a) Determinare in ciascun caso una base e la dimensione di $K\,\mathrm{er} f$ e $\mathrm{Im}\, f$