

COSTRUZIONE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

Example 1 Costruire un'applicazione lineare che verifichi le seguenti condizioni:

$$(i) \quad f: R^3 \longrightarrow R^3 \quad f(1, 0, 0) = (0, 0, 1) \quad f(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(ii) \quad f: R^2 \longrightarrow R^3 \quad f(1, 1) = (0, 0, 1) \quad f(1, 0) = (1, 1, 1)$$

Soluzione(i) Ricordiamo che un'applicazione è univocamente determinata quando conosciamo le immagini dei vettori una base.

Nel nostro caso $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ costituiscono una base di R^3 (quella canonica!) e quindi possiamo estendere f per linearità su tutto R^3 . Consideriamo un generico vettore di R^3 che indichiamo con (x,y,z)

Le componenti di tale vettore nella base precedente sono proprio x,y e z quindi

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = f(x(1, 0, 0)) + f(y(0, 1, 0)) + f(z(0, 0, 1)) = \\ &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(0, 0, 1) + y(1, 1, 1) + z(0, 0, 0) = (0, 0, x) + (y, y, y) + (0, 0, 0) = \\ &= (y, y, x + y) \end{aligned}$$

$$\text{In maniera compatta} \quad f(x, y, z) = (y, y, x + y)$$

Soluzione(ii) Anche in questo caso la f è assegnata sui vettori di una base $(1,1)$ e $(1,0)$ e quindi per linearità la possiamo estendere ad un'applicazione di R^2 .

Cosa cambia rispetto al caso precedente? La base non è quella canonica e quindi le componenti di un generico vettore (x,y) non sono x e y nella base $(1,1)$ e $(1,0)$ e dobbiamo determinarle.

$$(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 0) = (\alpha + \beta, \alpha) \text{ da cui } (x, y) = (\alpha + \beta, \alpha) \text{ e quindi } \alpha = y \text{ e } \beta = x - y$$

$$f(x, y) = f(\alpha(1, 1) + \beta(1, 0)) = f(\alpha(1, 1)) + f(\beta(1, 0)) =$$

$$= \alpha f(1, 1) + \beta f(1, 0) = y(0, 0, 1) + (x - y)(1, 1, 1) =$$

$$= (0, 0, y) + (x - y, x - y, x - y) = (x - y, x - y, x)$$

$$\text{In maniera compatta} \quad f(x, y) = (x - y, x - y, x)$$

Quindi attenzione quando l'applicazione è assegnata su una base che non è quella canonica!!!

Exercise 1 Costruire un'applicazione lineare che verifichi le seguenti condizioni:

$$(i) \quad f: R^3 \longrightarrow R^3 \quad f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \quad f(1, 1, 0) = (1, 1, 1) \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(ii) \quad f: R^2 \longrightarrow R^3 \quad f(1, 1) = (0, 1, 1) \quad f(1, 2) = (1, 1, 1)$$

$$(i) \quad f: R^3 \longrightarrow R^3 \quad f(1, 0, 0) = (0, 0, 1) \quad f(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \quad f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$